

现代数学基础丛书

# 排队论基础

◆ 孙景儒 李建平 著



科学出版社

## 《现代数学基础丛书》编委会

副主编 夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委 (以姓氏笔画为序)

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦 孙永生

江泽坚 江泽培 李大潜 陈希孺 张恭庆

严志达 胡和生 姜伯驹 聂灵沼 莫绍揆

曹锡华



## 内 容 简 介

本书系统地介绍排队论的概念、理论和方法.内容包括:预备知识、 $M/M/1$ 系统、 $M/G/1$ 系统、具有假时间的  $M/G/1$  系统、 $G/M/m$  系统、离散时间排队系统.本书论述严谨、深入浅出,还包含了作者的研究成果.

本书读者对象为大专院校概率统计、应用数学和管理科学等专业的大学生、研究生、教师和有关科技工作者.

### 图书在版编目(CIP)数据

---

排队论基础/孙荣恒,李建平著. —北京:科学出版社,2002

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-010275-4

I. 排… II. ①孙…②李… III. 排队论 IV. O226

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 016490 号

---

责任编辑:刘嘉善/责任校对:陈丽珠

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002 年 10 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2002 年 10 月第一次印刷 印张:7 7/8

印数:1—2 500 字数:200 000

定价:20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

## 前 言

排队论是运筹学的重要组成部分. 20 世纪初丹麦数学家、电气工程师爱尔朗(A. K. Erlang)把概率论应用于电话通话问题, 从而开创了这门应用数学科学. 20 世纪 30 年代中期, 当费勒(W. Feller)引进了生灭过程时, 排队论才被数学界承认为一门重要的学科. 20 世纪 40 年代排队论在运筹学这个新领域中成了一个重要的部分. 20 世纪 50 年代初肯德尔(D. G. Kendall)对排队论作了系统的研究. 他用马尔柯夫(A. A. Markov)链方法研究排队论, 使排队论得到进一步的发展. 20 世纪 60 年代起排队论研究的课题日趋复杂, 很多问题很难求得精确解, 因此开始了近似方法的研究.

排队论应用范围很广. 它适用于一切服务系统. 尤其在通信系统、交通系统、计算机存储系统和生产管理系统等方面应用得最多.

本书是排队论研究的一本专著. 着重介绍了排队论的基本概念、基本理论、基本方法和当前研究的主要结果(其中相当一部分内容是作者近年来的研究成果). 本书共六章, 其内容有: 预备知识、 $M/M/1$  系统、 $M/G/1$  系统、具有假时间的  $M/G/1$  系统、 $G/M/m$  系统、离散时间排队系统.

本书曾以讲稿形式为重庆大学、中国人民解放军后勤工程学院研究生讲授过多次, 后经过数次修改才成现在这样. 在撰写过程中, 作者力求系统严谨、深入浅出、通俗易懂, 希望本书能成为学习排队论的一本好的入门书. 后勤工程学院国际小波分析应用研究中心翟江涛、许川容、汪益川、王会云、潘伟等为本书做出了贡献.

徐光辉教授审阅了全书, 提出了一些宝贵意见, 中国人民解放军

军后勤工程学院的翟江涛、许川容、汪益川、王会云、潘伟和重庆大学的潘致锋等打印和校对了书稿,作者在此一并表示衷心感谢!对于科学出版社的热忱支持,作者亦表示衷心感谢!

本书得到国家自然科学基金项目(69903012)和重庆市信息产业发展基金项目(200113012)资助出版.由于作者水平有限,本书的缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

孙荣恒 李建平

2001年6月18日

# 目 录

引言	(1)
第一章 预备知识	(5)
§ 1.1 两个重要的分布	(5)
1.1.1 几何分布	(5)
1.1.2 指数分布	(7)
§ 1.2 条件数学期望	(11)
1.2.1 条件数学期望	(11)
1.2.2 全概率公式与条件方差	(12)
§ 1.3 泊松(Poisson)过程	(13)
1.3.1 随机过程定义	(13)
1.3.2 随机过程的分布及其数字特征	(14)
1.3.3 泊松过程	(15)
§ 1.4 伯努利(Bernoulli)过程	(20)
§ 1.5 马尔可夫过程	(23)
1.5.1 马氏(Markov)过程的定义	(23)
1.5.2 连续参数马氏链	(25)
§ 1.6 更新过程	(31)
1.6.1 定义与有关概念	(31)
1.6.2 更新定理	(33)
1.6.3 年龄与剩余寿命的分布	(36)
1.6.4 年龄与剩余寿命的极限分布	(39)
第二章 $M/M/\cdot$ 系统	(44)
§ 2.1 平衡状态的一些结果	(44)
2.1.1 $M/M/n$ 系统	(44)

2.1.2	$M/M/1$ 系统	(50)
2.1.3	$M/M/n/n$ 系统	(54)
2.1.4	$M/M/\infty$ 系统	(55)
2.1.5	利特尔(Little)公式	(55)
2.1.6	$M/M/n/N$ 系统( $n \leq N$ )	(56)
2.1.7	$M/M/n/m/m$ 系统( $n \leq m$ )	(59)
§ 2.2	瞬时状态的一些结果	(62)
2.2.1	$M/M/\infty$ 系统	(62)
2.2.2	$M/M/1$ 系统	(67)
§ 2.3	忙期	(68)
2.3.1	$M/M/\cdot$ 系统的平均忙期	(68)
2.3.2	$M/G/1$ 系统的忙期	(74)
2.3.3	$M/M/n$ 系统的 $k(k \geq 0)$ 阶繁忙期	(78)
§ 2.4	$E_r/M/1$ 系统	(79)
2.4.1	队长的分布	(79)
2.4.2	等待时间的分布	(84)
2.4.3	忙期	(85)
§ 2.5	批服务的 $M/M^r/1$ 系统	(87)
2.5.1	$M/M^r/1$ 系统	(87)
2.5.2	最多服务 $r$ 个的批服务 $M/M/1$ 系统	(88)
§ 2.6	$E_r^s/M/1$ 系统	(90)
2.6.1	队长的分布	(90)
2.6.2	忙期的分布	(91)
2.6.3	等待时间的分布	(94)
§ 2.7	具有反馈的 $E_r^s/M/1$ 系统	(97)
2.7.1	队长的分布	(98)
2.7.2	忙期的分布	(99)
2.7.3	逗留时间的分布	(102)
§ 2.8	$M/M/\cdot$ 系统的忙期	(103)



2.8.1	几个引理 .....	(104)
2.8.2	$M/M/\cdot$ 系统的 $k$ 阶忙期 .....	(106)
2.8.3	$M/M/n$ 系统的忙期分布 .....	(109)
2.8.4	$M/M/n/n$ 系统忙期的分布 .....	(111)
2.8.5	$M/M/n/N (n \leq N)$ 系统的忙期分布 ...	(112)
2.8.6	$M/M/n/m/m (n \leq m)$ 系统的忙期分布 .....	(114)
<b>第三章</b>	<b><math>M/G/1</math> 系统 .....</b>	<b>(116)</b>
§ 3.1	统计平衡队长 .....	(116)
3.1.1	嵌入马尔可夫链 .....	(116)
3.1.2	平均队长 .....	(118)
3.1.3	队长的分布 .....	(120)
§ 3.2	等待时间的分布 .....	(121)
3.2.1	FCFS 等待时间的分布 .....	(121)
3.2.2	先来后服务(FCLS)等待时间的分布 .....	(123)
§ 3.3	$M^k/G/1$ 系统 .....	(125)
3.3.1	平均队长 .....	(126)
3.3.2	队长的分布 .....	(128)
3.3.3	忙期 .....	(129)
3.3.4	FCFS 规则下的等待时间 .....	(131)
3.3.5	FCLS 规则下的等待时间 .....	(134)
§ 3.4	具有反馈的 $M/G/1$ 系统 .....	(136)
3.4.1	队长的分布 .....	(136)
3.4.2	忙期 .....	(138)
3.4.3	逗留时间的分布 .....	(140)
§ 3.5	优先非抢占的 $M/G/1$ 系统 .....	(141)
<b>第四章</b>	<b>具有假时间的 <math>M/G/1</math> 系统 .....</b>	<b>(146)</b>
§ 4.1	穷尽服务系统 .....	(148)
4.1.1	具有假时间的一般模型 .....	(148)

4.1.2	多假时间模型 .....	(152)
4.1.3	单假时间模型 .....	(154)
4.1.4	批到达系统 .....	(156)
§ 4.2	门限服务系统 .....	(156)
4.2.1	一个在再生周期中的队长 .....	(157)
4.2.2	多假时间模型 .....	(159)
4.2.3	单假时间模型 .....	(162)
4.2.4	伯努利门限服务多假时间模型 .....	(162)
4.2.5	具有伯努利反馈的多假时间模型 .....	(165)
4.2.6	LCFS 多假时间模型 .....	(167)
§ 4.3	有限服务系统 .....	(168)
4.3.1	多假时间纯有限服务系统 .....	(169)
4.3.2	最多服务 $M$ 个的有限服务系统 .....	(171)
§ 4.4	减少服务系统 .....	(178)
4.4.1	纯减少服务系统 .....	(178)
4.4.2	一般减少服务系统 .....	(180)
4.4.3	二项穷尽服务系统 .....	(184)
<b>第五章</b>	<b><math>G/M/m</math> 系统 .....</b>	<b>(187)</b>
§ 5.1	到达时刻队长的平稳分布 .....	(187)
5.1.1	嵌入马氏链的转移概率 .....	(187)
5.1.2	到达时刻队长的平稳分布 .....	(190)
§ 5.2	等待时间的分布 .....	(193)
5.2.1	等待时间的分布 .....	(193)
5.2.2	$G/M/1$ 系统 .....	(194)
5.2.3	$G/M/2$ 系统 .....	(195)
<b>第六章</b>	<b>离散时间排队系统 .....</b>	<b>(198)</b>
§ 6.1	$\text{Geo}/\text{Geo}/1$ 系统 .....	(198)
6.1.1	队长的平稳分布 .....	(199)
6.1.2	忙期 .....	(202)

6.1.3	等待时间 .....	(206)
§ 6. 2	Geo/Geo/ $m$ 排队系统( $m \geq 1$ ) .....	(207)
§ 6. 3	Geo/G/1 排队系统 .....	(213)
6.3.1	队长的平稳分布 .....	(213)
6.3.2	忙期 .....	(218)
6.3.3	等待时间的分布 .....	(220)
§ 6.4	Geo <sup>s</sup> /G/1 排队系统 .....	(222)
6.4.1	队长的平稳分布 .....	(222)
6.4.2	忙期 .....	(224)
6.4.3	等待时间的分布 .....	(226)
§ 6. 5	Geo/Geo/ $\cdot$ 系统的忙期 .....	(228)
6.5.1	两个引理 .....	(229)
6.5.2	Geo/Geo/ $\cdot$ 系统的忙期 .....	(229)
6.5.3	例子与应用 .....	(233)
参考文献	.....	(238)

# 引 言

## 一、排队论发展简介

排队论起源于 20 世纪初的电话通话. 1909—1920 年丹麦数学家、电气工程师爱尔朗(A. K. Erlang)用概率论方法研究电话通话问题, 从而开创了这门应用数学学科, 并为这门新学科建立了许多基本原则. 30 年代中期, 当费勒(W. Feller)引进了生灭过程时, 排队论才被数学界承认为一门重要的学科. 在二战期间和二战以后, 排队论在运筹学这个新领域中成了一个重要的内容. 20 世纪 50 年代初肯德尔(D. G. Kendall)对排队论作了系统的研究, 他用嵌入马尔可夫(A. Markov)链方法研究排队论, 使排队论得到了进一步发展. 他首先用三个字母组成的符号表示排队系统. 20 世纪 60 年代起, 排队论研究的课题日趋复杂, 很多问题不是很难求得其精确解, 就是求得的解非常复杂, 不便于应用. 因而开始了近似方法的研究.

排队论的产生与发展来自实际的需要. 实际的需要也必将决定它今后的发展方向. 排队论应用范围很广. 它应用于一切服务系统. 尤其在通信系统、交通系统、计算机、存储系统、生产管理等方面应用得最多.

## 二、排队系统的组成部分

一般排队系统由输入过程与到达规则、排队规则、服务机构的结构、服务时间与服务规则组成.

1. 输入过程与到达规则. 输入过程一般是用(顾客)到达间隔时间来描述的. 根据到达间隔时间所服从的分布, 输入过程可分为定长输入、(负)指数输入(Poisson 输入)、爱尔朗输入、几何输入(Bernoulli 输入)、负二项输入与一般输入. 到达规则是指在这些输

入的每一种中又可分为单个到达、成批到达、依时到达、移态到达等.今后如不特别说明,到达均为单个的,即每次只到达一个顾客.

2. 排队规则.排队规则一般分为等待制、损失制和混合制.在等待制与混合制中通常又可分为先来先服务(FCFS)、后来先服务(LCFS)、随机服务(ROS)、优先非抢占服务、优先抢占服务等.在混合制中又分为队长(容量)有限、等待时间有限.此外,还有顾客服务后反馈以及共同占用、占而不用等等.今后,如不特别说明,总认为系统的排队规则为等待制先来先服务.

3. 服务机构的结构.服务机构的结构可分为单服务台、有限个服务台与无限多个服务台.而在(有限)多个服务台中又可分为并联、串联两种.今后,如不特别说明,服务台均为并联的.

4. 服务时间与服务规则.服务时间是指服务一个顾客所用的时间.根据其分布,一般分为定长分布、指数分布、几何分布与一般分布等.服务规则分为有假时间与无假时间两类.在有假时间中又可分为穷尽服务、门限服务、有限服务、减量(decrementing)服务.而在穷尽服务和门限服务中又可分为单假时间与多假时间两种.在上述各种情形中又可分为单个服务与成批服务.今后,如无特别说明均指无假时间单个服务.

### 三、排队系统的表示方法

1951年肯德尔用三个字母组成的符号  $A/B/C$  表示排队论系统.其中  $A$  表示到达间隔时间分布,  $B$  表示服务时间的分布,  $C$  表示服务机构中服务台的个数.一般用  $D$  表示定长分布,用  $M$  表示指数分布,用  $Geo$  表示几何分布,用  $E_r$  表示  $r$  阶爱尔朗分布,用  $H_R$  表示  $R$  相超指数分布,用  $G$  表示一般分布.例如,  $M/M/n$  表示到达间隔时间与服务时间均服从指数分布(参数一般不相同)且服务机构有  $n$  个服务台的排队系统;  $M/G/1$  表示到达间隔时间服从指数分布服务时间服从一般分布,服务机构只有一个服务台的排队论系统.后来人们在三个字母后面又加了两个字母,分别表示系统的容量和输入源中的顾客数,并且在前两个字母的右上角加字母以表示每次到达几个顾客与每次服务几个顾客.例如,

$M^{\xi}/G^{\eta}/1/m/N$ 表示该系统的到达间隔时间服从指数分布,每次到达  $\xi$  ( $\xi$  可以是随机变量)个顾客,服务时间服从一般分布,每次服务  $\eta$  ( $\eta$  可以是随机变量)个顾客,服务机构只有一个服务台且最多只能容纳  $m$  个顾客,输入源最多只有  $N$  个顾客.如果只有前三个字母,则表示系统的容量和输入源中的顾客数均为无限.

一般还假设到达间隔时间序列  $\{J_i, i \geq 1\}$  为独立同分布随机变量序列,服务时间序列  $\{B_i, i \geq 1\}$  也为独立同分布随机变量序列且这两个随机变量序列也相互独立.

#### 四、排队系统的主要指标

评价一个排队系统的好坏要以顾客和服务机构两方面利益为标准.就顾客来说,总希望等待时间或逗留时间越短越好,从而希望服务台个数尽可能多些.但是,就服务机构来说,增加服务台数,就意味着增加投资,增加多了要造成浪费,增加多少比较好呢?顾客与服务机构为了照顾自己的利益对排队系统中的几个指标:队长、等待时间、服务台的忙期都很关心.因此,这几个指标就成了排队论的主要研究内容.

1. 队长.队长是指系统中顾客数,即正在服务的顾客数与等待服务的顾客数之和.它一般是一个随机变量,通常要求其分布和前两阶矩.

2. 等待时间.从顾客到达时起一直到他被接受服务时止这段时间称为(该)顾客的等待时间.而称从顾客到达系统时起一直到他被服务完离开系统时止这段时间为(该)顾客的逗留时间,即顾客的等待时间与服务时间之和.我们也要求它们的分布和前两阶矩.

3. 忙期.忙期是指空闲的服务机构从有顾客到达时起一直到服务机构又没有顾客时止这段时间.与忙期相对应的是闲期.它是指服务机构从开始没有顾客时起一直到服务机构有顾客时止这段时间.对于有  $n$  个服务台的系统,一般还要讨论其  $k$  阶繁忙期.从系统中开始有  $k$  个顾客在等待服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间称为该系统  $k$  阶繁忙期.零阶繁忙期称繁忙期.忙

期、闲、 $k$  阶繁忙期也是随机变量. 一般也要讨论它们的分布与前两阶矩.

当然, 对不同的系统, 上述三个指标的重要性也是不同的, 有时甚至是没有意义的. 例如,  $M/M/\infty$  系统与  $M/M/n/n$  系统, 讨论顾客的等待时间都是没有意义的.

# 第一章 预备知识

## § 1.1 两个重要的分布

### 1.1.1 几何分布

如果随机变量  $\xi$  的分布律为

$$P\{\xi = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad (1.1.1)$$

则称  $\xi$  服从几何分布, 记为  $\xi \sim \text{Geo}(p)$ , 且有

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \quad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \quad (1.1.2)$$

**定理 1.1.1** 设  $\xi$  为只取正整数值的随机变量. 则下列两命题等价:

(1)  $\xi$  服从几何分布.

(2)  $P\{\xi > m + n | \xi > n\} = P\{\xi > m\}, m, n = 0, 1, 2, \dots$

**证** (1)  $\Rightarrow$  (2). 设

$$P\{\xi = k\} = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1, q = 1 - p.$$

则由条件概率定义, 得

$$\begin{aligned} P\{\xi > m + n | \xi > n\} &= \frac{P\{\xi > m + n, \xi > n\}}{P\{\xi > n\}} \\ &= \frac{P\{\xi > m + n\}}{P\{\xi > n\}} = \frac{q^{m+n}}{q^n} \\ &= q^m = P\{\xi > m\}. \end{aligned}$$

**证** (2)  $\Rightarrow$  (1). 由(2)得

$$\frac{P\{\xi > m + n\}}{P\{\xi > n\}} = P\{\xi > m\}. \quad (i)$$

从而得

$$\frac{P\{\xi > m - 1 + n\}}{P\{\xi > n\}} = P\{\xi > m - 1\}, (m \geq 1), \quad (ii)$$



(ii) - (i), 得

$$\frac{P\{\xi = m + n\}}{P\{\xi > n\}} = P\{\xi = m\},$$

即

$$P\{\xi = m + n\} = P\{\xi = m\}P\{\xi > n\}. \quad (1.1.3)$$

令

$$\tilde{G}(n) = P\{\xi > n\}, \quad \tilde{F}(m) = P\{\xi = m\}, \quad m \geq 1.$$

则

$$\tilde{F}(m + n) = \tilde{G}(n)\tilde{F}(m), \quad \text{且 } \tilde{G}(1) + \tilde{F}(1) = 1.$$

从而

$$\begin{aligned} P\{\xi = k\} &= \tilde{G}(1)\tilde{F}(k-1) = [\tilde{G}(1)]^2\tilde{F}(k-2) = \cdots \\ &= \tilde{F}(1)[\tilde{G}(1)]^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

所以  $\xi$  服从参数为  $p = \tilde{F}(1)$  的几何分布. 称 (2) 为几何分布的无记忆性.

**定理 1.1.2** 设  $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$  为  $r$  个独立同分布随机变量, 且  $\xi_1$  服从参数为  $p$  的几何分布. 则

$$P\left\{\sum_{i=1}^r \xi_i = k\right\} = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \cdots, q = 1-p.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \text{当 } r=2 \text{ 时, } P\{\xi_1 + \xi_2 = k\} &= \sum_{i=1}^{k-1} P\{\xi_1 = i, \xi_2 = k-i\} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p q^{i-1} p q^{k-i-1} = p^2 \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} = C_{k-1}^{2-1} p^2 q^{k-2}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

所以  $r=2$  时结论成立. 设  $r=n$  时结论成立. 往证  $r=n+1$  时结论也成立. 因为

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = k\right\} &= P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i + \xi_{n+1} = k\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k-n} P\left\{\xi_{n+1} = j, \sum_{i=1}^n \xi_i = k-j\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k-n} p q^{j-1} C_{k-j-1}^{n-1} p^n q^{k-j-n} = p^{n+1} q^{k-n-1} \sum_{j=1}^{k-n} C_{k-j-1}^{n-1} \\ &= C_{k-1}^n p^{n+1} q^{k-n-1}, \quad k = n+1, n+2, \cdots. \text{ 因 } \left[\sum_{j=0}^k C_{n+j}^n = C_{n+k+1}^{n+1}\right]. \end{aligned}$$

### 1.1.2 指数分布

如果随机变量  $\xi$  具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

则称  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的指数分布, 记为  $\xi \sim \Gamma(1, \alpha)$  或  $\xi \sim M(\alpha)$ .

**定理 1.1.3** 设  $\xi$  是非负连续型随机变量, 则下两命题等价:

- (1)  $\xi$  服从指数分布.
- (2) 对任意实数  $x, y \geq 0$ , 有

$$P\{\xi > x + y | \xi > x\} = P\{\xi > y\}.$$

命题(2) 称为指数分布随机变量的无记忆性.

**证** (1)  $\Rightarrow$  (2), 设  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的指数分布, 则

$$P\{\xi > x\} = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ e^{-\alpha x}, & x > 0. \end{cases}$$

从而, 对  $x, y \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P\{\xi > x + y | \xi > x\} &= P\{\xi > x + y, \xi > x\} / P\{\xi > x\} \\ &= P\{\xi > x + y\} / P\{\xi > x\} \\ &= e^{-\alpha(x+y)} / e^{-\alpha x} = e^{-\alpha y} = P\{\xi > y\}. \end{aligned}$$

**证** (2)  $\Rightarrow$  (1), 由(2) 成立, 得

$$P\{\xi > x + y\} = P\{\xi > x\} P\{\xi > y\}, \quad x, y \geq 0.$$

记  $\tilde{G}(x) = P\{\xi > x\}$ , 则上式变为

$$\tilde{G}(x + y) = \tilde{G}(x) \tilde{G}(y), \quad x, y \geq 0, \quad (1.1.4)$$

且对任意  $x \geq 0$ , 有  $0 \leq \tilde{G}(x) \leq 1$ . 设  $y > x \geq 0$ , 则

$$\tilde{G}(y) = \tilde{G}(y - x + x) = \tilde{G}(y - x) \tilde{G}(x).$$

故

$$\tilde{G}(y) - \tilde{G}(x) = [\tilde{G}(y - x) - 1] \tilde{G}(x) \leq 0.$$

所以  $\tilde{G}(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  内单调不增. 由(1.1.4) 得

$$\tilde{G}(nt) = [\tilde{G}(t)]^n, \quad t \geq 0. \quad (1.1.5)$$

令  $t = \frac{1}{n}$  得  $\tilde{G}(1) = \left[ \tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n$ . 记  $a = \tilde{G}(1)$ , 得  $\tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$ . 由 (1.1.4) 得  $\tilde{G}(mt) = [\tilde{G}(t)]^m$ , 令  $t = \frac{1}{n}$ , 得

$$\tilde{G}\left(\frac{m}{n}\right) = \left[ \tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right) \right]^m = a^{m/n}. \text{ 此示, 对任意有理数 } r > 0, \text{ 有}$$

$$\tilde{G}(r) = a^r. \quad (1.1.6)$$

由于  $\tilde{G}(x)$  单调不增, 所以对任意实数  $x > 0$ , 取有理数列  $r_n$  与  $r'_n$  使得  $r'_n \uparrow x, r_n \downarrow x$ , 则有

$$\tilde{G}(r_n) \leq \tilde{G}(x) \leq \tilde{G}(r'_n),$$

即

$$a^{r_n} \leq \tilde{G}(x) \leq a^{r'_n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 取极限得  $\tilde{G}(x) = a^x$ .

因为  $0 \leq a = \tilde{G}(1) = P\{\xi > 1\} \leq 1$ , 由  $\tilde{G}(x) = P\{\xi > x\} = a^x, x \geq 0$ , 且  $\xi$  为非负连续型随机变量知  $0 < a < 1$ .

令  $\alpha = -\ln a$ . 则有

$$a = e^{-\alpha}, \tilde{G}(x) = P\{\xi > x\} = e^{-\alpha x}, x > 0.$$

又因, 当  $x \leq 0$  时  $P\{\xi < x\} = 0$ , 从而知  $\xi \sim \Gamma(1, \alpha)$ .

**定理 1.1.4** 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  为  $n$  个独立同分布随机变量, 且

$\xi_1 \sim \Gamma(1, \alpha)$ , 则  $\sum_{i=1}^n \xi_i \sim \Gamma(n, \alpha)$ , 即  $\sum_{i=1}^n \xi_i$  为具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (1.1.7)$$

的  $n$  阶爱尔朗随机变量, 其中  $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ , 称  $\Gamma(n)$  为参数是  $n$  的  $\Gamma$  函数.

对于  $\Gamma$  函数有如下公式:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.1.8)$$

证 当  $n = 2$  时,  $\xi_1 + \xi_2$  的密度函数为

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \alpha^2 e^{-\alpha x} e^{+\alpha x - \alpha z} dx \\ = \alpha^2 z e^{-\alpha z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

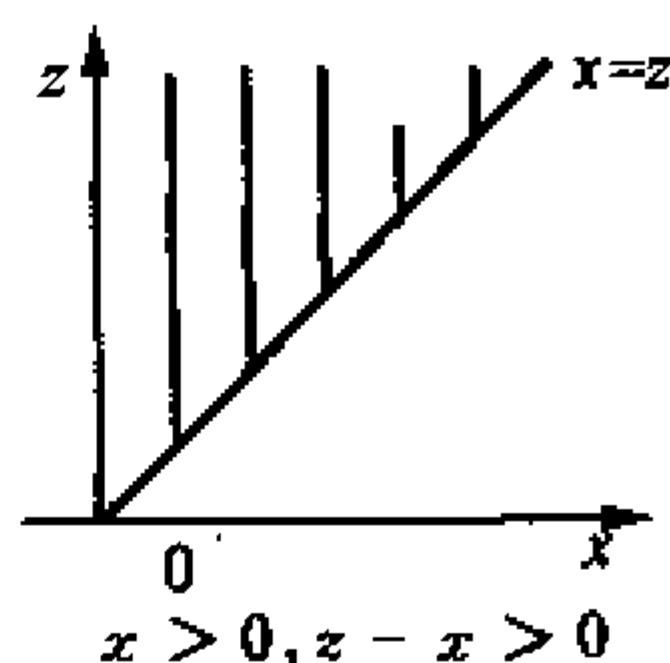


图 1-1

此示, 当  $n = 2$  时结论成立. 设  $n = k$  时结论成立. 往证  $n = k + 1$  时结论也成立. 记  $\eta = \sum_{i=1}^k \xi_i$ , 则  $\eta \sim \Gamma(k, \alpha)$ . 因  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}$  独立, 所以  $\eta$  与  $\xi_{k+1}$  独立. 故

$$f_{\eta+\xi_{k+1}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) f_{\xi_{k+1}}(z-x) dx,$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \frac{\alpha^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\alpha x} \cdot \alpha e^{-(z-x)} dx, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha^{k+1} z^k}{\Gamma(k+1)} e^{-\alpha z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

此示, 当  $n = k + 1$  时结论也成立. 由数学归纳法定理结论得证. 一般地, 如果随机变量  $\xi$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\beta)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

则称  $\xi$  服从参数为  $\beta, \alpha$  的  $\Gamma$  分布, 并记为  $\xi \sim \Gamma(\beta, \alpha)$ . 当  $\beta = n$ ,  $n$  为正整数时, 称  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的  $n$  阶 Erlang 分布. 当  $\beta = 1$  时称  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的指数分布. 当  $\beta = \frac{n}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$  时称  $\xi$  服从自由度为  $n$  的卡方分布, 并记为  $\xi \sim \chi^2(n) \left[ = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$ . 用数学归纳法易证如下定理 1.1.5.

**定理 1.1.5** (1) 设  $\xi_i \sim \Gamma(1, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  且  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  相互独立, 则

$$\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim \Gamma(1, \sum_{i=1}^n \alpha_i).$$

(2) 设  $\xi_i \sim \text{Geo}(p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  相互独立, 则  $\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim \text{Geo}(1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)) = \text{Geo}(1 - \prod_{i=1}^n q_i)$ ,  $q_i = 1 - p_i$

**证** (1) 因  $\eta_2 = \min(\xi_1, \xi_2)$  的密度函数为

$$f_{\eta_2}(x) = f_{\xi_1}(x)[1 - F_{\xi_2}(x)] + f_{\xi_2}(x)[1 - F_{\xi_1}(x)]$$

$$= \begin{cases} \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} \cdot e^{-\alpha_2 x} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 x} e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1 x = (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

此示  $\eta_2 = \min(\xi_1, \xi_2) \sim \Gamma(1, \alpha_1 + \alpha_2)$ , 即当  $n = 2$  时结论成立. 设

$n = k$  时结论成立, 即  $\eta_k = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \sim \Gamma(1, \sum_{i=1}^k \alpha_i)$ , 往证  $n = k + 1$  时结论成立. 由于  $\eta_k$  与  $\xi_{k+1}$  独立, 且  $\xi_{k+1} \sim \Gamma(1, \alpha_{k+1})$ , 则

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}) \\ &= \min(\eta_k, \xi_{k+1}) \sim \Gamma(1, \sum_{i=1}^k \alpha_i + \alpha_{k+1}) \\ &= \Gamma(1, \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i). \end{aligned}$$

此示  $n = k + 1$  时结论也成立.

**证** (2) 因为

$$\begin{aligned} P\{\min(\xi_1, \xi_2) = k\} &= P\{\xi_1 = k, \xi_2 \geq k\} + P\{\xi_2 = k, \xi_1 > k\} \\ &= p_1 q_1^{k-1} \cdot q_2^{k-1} + p_2 q_2^{k-1} \cdot q_1^k \\ &= (1 - q_1 q_2)(q_1 q_2)^{k-1}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ , 其中,  $q_i = 1 - p_i$ ,  $i = 1, 2$ . 这说明  $n = 2$  时结论成立. 剩下的证明其方法与(1)相同.

如果随机变量  $\xi$  具有密度函数

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^R \beta_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda_i > 0, 0 < \beta_i < 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^R \beta_i = 1,$$

则称服从  $R$  相(阶)超指数分布.

## § 1.2 条件数学期望

### 1.2.1 条件数学期望

设  $F_{\xi}(x)$  为随机变量  $\xi$  的分布函数. 如果  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_{\xi}(x) < \infty$ , 则定义  $\xi$  的数学期望为

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x). \quad (1.2.1)$$

上式中的积分称为 Riemann-Stieltjes 积分. 当  $\xi$  为离散型且取值  $x_1, x_2, x_3, \dots$  时, 则(1.2.1)式变为

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{\xi = x_i\}. \quad (1.2.2)$$

当  $\xi$  为连续型且有密度  $f_{\xi}(x)$  时, 则(1.2.1)式变为

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx. \quad (1.2.3)$$

设  $g(x)$  为  $x$  的连续函数. 如  $g(\xi)$  的数学期望存在, 则有

$$E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{\xi}(x). \quad (1.2.4)$$

设  $A, B$  为两个事件且  $P(B) > 0$ , 则在事件  $B$  发生下事件  $A$  发生的条件概率定义为  $\frac{P(AB)}{P(B)}$ , 记为  $P(A|B)$ , 即

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.2.5)$$

设  $\xi, \eta$  为两个随机变量, 由条件概率的定义, 在  $\eta = y$  下  $\xi$  的条件分布函数定义为

$$P\{\xi < x | \eta = y\} = \begin{cases} \frac{P\{\xi < x, \eta = y\}}{P\{\eta = y\}}, & \text{当 } (\xi, \eta) \text{ 为离散型且 } P\{\eta = y\} > 0, \\ \int_{-\infty}^x \frac{f_{\xi, \eta}(t, y)}{f_{\eta}(y)} dt, & \text{当 } (\xi, \eta) \text{ 为连续型且 } f_{\eta}(y) > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

并记为

$$F_{\xi|\eta}(x|y) = p\{\xi < x | \eta = y\}. \quad (1.2.7)$$

由条件分布函数和数学期望的定义, 现可给出条件数学期望的定义.

**定义 1.2.1** 如果  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_{\xi|\eta}(x|y) < \infty$ , 则定义在  $\eta = y$  下  $\xi$  的条件数学期望为  $\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta}(x|y)$ . 记为  $E(\xi | \eta = y)$ , 简记为  $E(\xi | y)$ , 即

$$E(\xi | y) = E(\xi | \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta}(x|y). \quad (1.2.8)$$

因为  $E(\xi | y)$  是  $y$  的函数, 它的取值依赖于  $\eta$ . 故当我们把  $E(\xi | y)$  中的  $y$  换成  $\eta$  时,  $E(\xi | \eta)$  就是  $\eta$  的函数且满足关系式: 当  $\eta = y$  时,

$$E(\xi | \eta) = E(\xi | y),$$

我们称  $E(\xi | \eta)$  为在  $\eta$  下  $\xi$  的条件数学期望.

因  $E(\xi | \eta)$  是  $\eta$  的函数, 可以证明  $E(\xi | \eta)$  还是随机变量, 如果其数学期望存在, 则由 (1.2.4) 式有

$$E[E(\xi | \eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi | y) dF_{\eta}(y). \quad (1.2.9)$$

可以证明: 当  $E|\xi| < \infty$  时, 有<sup>[1]</sup>

$$E[E(\xi | \eta)] = E(\xi). \quad (1.2.10)$$

由 (1.2.10) 与 (1.2.9) 两式得

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi | \eta = y) dF_{\eta}(y). \quad (1.2.11)$$

称 (1.2.11) 式为全数学期望公式. 它是一个非常有用的公式.

### 1.2.2 全概率公式与条件方差

设  $A$  为任一事件. 令

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases} \quad (1.2.12)$$

称  $I_A(\omega)$  为  $A$  的示性函数. 常简记  $I_A(\omega)$  为  $I_A$ , 即  $I_A = I_A(\omega)$ . 因为  $E(I_A) = P(A)$ , 所以在 (1.2.11) 式中, 当令  $\xi = I_A$  时, 得

$$\begin{aligned} P(A) = E(I_A) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(I_A \mid \eta = y) dF_{\eta}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid \eta = y) dF_{\eta}(y). \end{aligned}$$

即

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid \eta = y) dF_{\eta}(y). \quad (1.2.13)$$

称上式为全概率公式.

**定义 1.2.2** 如果  $E\{[\xi - E(\xi \mid \eta)]^2 \mid \eta\}$  存在, 则称它在  $\eta$  下  $\xi$  的条件方差, 记为  $D(\xi \mid \eta)$  即

$$D(\xi \mid \eta) = E\{[\xi - E(\xi \mid \eta)]^2 \mid \eta\}. \quad (1.2.14)$$

**定理 1.2.1** 如果  $E(\xi^2) < \infty$ , 则

$$D(\xi) = E[D(\xi \mid \eta)] + D[E(\xi \mid \eta)]. \quad (1.2.15)$$

证明见[1].

## § 1.3 泊松(Poisson)过程

### 1.3.1 随机过程定义

**定义 1.3.1** 设  $(\Omega, \Gamma, P)$  为一概率空间,  $T$  为一实数集, 如果对每个  $t \in T$ , 都有定义于  $(\Omega, \Gamma, P)$  上的随机变量  $X(t, \omega)$  与之对应, 则称依赖  $t$  的随机变量族  $\{X(t, \omega), t \in T\}$  为一个随机过程.

其中  $T$  称为参数集. 它可以是离散的, 如  $T = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , 或  $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ , 或  $T = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ; 也可是连续的, 如  $T = \{t: t \geq 0\}$ , 或  $T = [a, b]$ , 或  $T = (-\infty, +\infty)$ . 称  $T$



中的元素  $t$  为参数. 称  $X(t, \omega)$  能取的每个值为状态, 称所有状态组成的集合  $S$  为状态空间.

由上定义知, 一个随机过程实际上是样本点  $\omega$  与参数  $t$  的二元函数. 当  $\omega \in \Omega$  固定时,  $X(t, \omega)$  就是  $t$  的普通函数. 称它为随机过程的一个样本函数或一个“实现”. 对不同的  $\omega \in \Omega$ , 相应有不同的样本函数. 因此随机过程也叫做随机函数. 当  $t \in T$  固定时,  $X(t, \omega)$  就是一个随机变量. 当  $\omega \in \Omega$  与  $t \in T$  都固定时,  $X(t, \omega)$  就是一个数值, 即随机过程的一个状态. 当  $T$  为连续时, 称随机过程为连续参数随机过程. 当  $T$  为离散时, 称随机过程为离散参数随机序列. 简称为随机序列. 如果对每一个固定的  $t \in T$ , 随机变量  $X(t, \omega)$  都是离散型的, 就说随机过程有一个离散状态空间, 否则就说随机过程有一个非离散的状态空间. 由状态空间  $S$  离散与否, 参数集  $T$  连续与离散可将随机过程分为四类(见表 1.1).

表 1.1

参 数 集 \ 状态空间	离散	非离散
	连续	离散
连续	连续参数链	随机过程
离散	离散参数链	随机序列

为了书写方便, 常将  $\{X(t, \omega), t \in T\}$  记成  $\{X(t), t \in T\}$ . 有时在不必要标明参数集时, 也将  $\{X(t, \omega), t \in T\}$  记成  $\{X(t)\}$ , 或  $X(t)$ , 或  $X_t$ . 参数  $t$  通常是指时间这一物理量, 但是也可以表示别的量,  $t$  也可以是多维的. 参数  $t$  是多维的随机过程称为随机场.

### 1.3.2 随机过程的分布及其数字特征

设  $\{X(t), t \in T\}$  为一随机过程, 对每个  $t \in T$ , 我们定义其一维分布函数为

$$F_t(x) \equiv P\{X(t) < x\}, x \in R.$$

当  $t$  变动时, 就得到一维分布函数族  $\{F_t(x), t \in T\}$ . 相应于一维分布函数  $F_t(x)$ , 我们可以定义  $\{X(t), t \in T\}$  的均值函数  $\mu_X(t)$  与方差函数  $\sigma_X^2(t)$  (如果它们都存在的话) 为

$$\mu_X(t) \equiv E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x),$$

$$\sigma_X^2(t) \equiv E[X(t) - \mu_X(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_X(t)]^2 dF_t(x) \quad (1.3.1)$$

对于  $t_1, t_2 \in T$ , 我们定义随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的二维分布函数为

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) \equiv P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}, x_1, x_2 \in R$$

有了二维分布函数, 我们可定义随机过程的二阶矩和协方差函数. 如果对  $s, t \in T, E[|X(s)X(t)|] < \infty$ , 则记

$$R_X(s, t) = E[X(s)X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{s, t}(x, y) \quad (1.3.2)$$

$$C_X(s, t) = E[X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)] \quad (1.3.3)$$

称  $R_X(s, t), C_X(s, t)$  分别为随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的相关(二阶矩)函数与协方差函数. 显然  $\sigma_X^2(t) = C_X(t, t), C_X(s, t) = R_X(s, t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

类似地, 我们可以引入多维分布函数和数字特征.

### 1.3.3 泊松过程

**定义 1.3.2** 设随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  的状态只取非负整数值, 如果它还满足

$$(1) X(0) = 0,$$

$$(2) \{X(t), t \geq 0\} \text{ 具有增量独立性,}$$

即对任意  $n$  个参数  $t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_1 \geq 0$ , 增量  $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  相互独立;

$$(3) \text{ 对任意 } s, t \geq 0, X(s+t) - X(s) \sim p(\lambda t) \text{ 即}$$

$$P\{X(s+t) - X(s) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \cdots, \lambda > 0,$$

$$(1.3.4)$$

则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为泊松过程, 称参数  $\lambda$  为平均到达率或强度.

一般  $X(t)$  表示在时间间隔  $[0, t]$  中到达某服务台的顾客数.  
易知

$$(1) E[X(t)] = \lambda t = D[X(t)], t \geq 0, \quad (1.3.5)$$

$$(2) R_X(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st, s, t \geq 0, \quad (1.3.6)$$

$$(3) C_X(s, t) = \lambda \min(s, t), s, t \geq 0. \quad (1.3.7)$$

证 (2) 因  $R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$ , 故当  $s < t$  时, 有

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E\{X(s)[X(t) - X(s) + X(s)]\} \\ &= E[X(s)]E[X(t) - X(s)] + E[X^2(s)] \\ &= \lambda s \cdot \lambda(t - s) + (\lambda s)^2 + \lambda s = \lambda s + \lambda^2 st. \end{aligned}$$

因此, 一般地有  $R_X(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$ . 因为  $C_X(s, t) = R_X(s, t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$ , 所以由(2)立证(3).

由(1.3.4)知对任意  $t, h \geq 0$ ,  $X(t+h) - X(h)$  与  $X(t)$  同分布, 即泊松过程的增量具有平稳性, 且  $X(t+h) \geq X(t)$ .

因为

$$\begin{aligned} P\{X(t+h) - X(t) \geq 0\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+h) - X(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!} = 1, \end{aligned}$$

由(1.3.4)知, 对任意  $h \geq 0$ ,

$$P\{X(h) = 0\} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \quad (1.3.8)$$

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h},$$

故  $\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{1}{h} P\{X(h) = 1\} = \lambda$ , 从而有

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h + o(h). \quad (1.3.9)$$

又因

$$\begin{aligned} P\{X(h) \geq 2\} &= 1 - P\{X(h) = 0\} - P\{X(h) = 1\} \\ &= 1 - [1 - \lambda h + o(h)] - [\lambda h + o(h)], \end{aligned}$$

所以

$$P\{X(h) \geq 2\} = o(h) \quad (1.3.10)$$

设  $\tau_n$  为泊松过程中第  $n$  个顾客到达的时刻. 记

$$J_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots, \tau_0 = 0. \quad (1.3.11)$$

则称序列  $\{J_n, n \geq 1\}$  为泊松过程的到达间隔时间序列.  $J_n$  表示从第  $n-1$  个顾客到达时起一直至第  $n$  个顾客到达时止这段时间.

**定理 1.3.1** 设泊松过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  具有强度  $\lambda$ ,  $\{J_n, n \geq 1\}$  为  $\{X(t), t \geq 0\}$  的到达间隔时间序列. 则  $\{J_n, n \geq 1\}$  是独立同分布随机变量序列, 且  $J_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$ .

**证**  $\forall t \in R$ , 当  $t \leq 0$  时, 则  $P\{J_1 < t\} = 0$ . 当  $t > 0$  时  $P\{J_1 < t\} = P\{X(t) \geq 1\} = 1 - P\{X(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$ , 所以  $J_1$  的分布函数为

$$F_{J_1}(t) = P\{J_1 < t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } J_1 \sim \Gamma(1, \lambda).$$

又当  $t > 0, n > 1$  时

$$\begin{aligned} & P\{J_n < t \mid J_i = s_i, 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= P\left\{X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i + t\right) - X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) \geq 1 \mid X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) = n-1\right\} \\ &= P\left\{X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i + t\right) - X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) \geq 1\right\} = P\{X(t) - X(0) \geq 1\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

当  $t \leq 0$  时, 有

$$P\{J_n < t \mid J_i = s_i, 1 \leq i \leq n-1\} = 0.$$

所以  $J_n$  的条件分布函数为

$$P\{J_n < t \mid J_i = s_i, 1 \leq i \leq n-1\} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

此示  $J_n$  与  $J_1, J_2, J_3, \dots, J_{n-1}$  相互独立,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 且  $J_n \sim \Gamma(1, \lambda)$ , 从而结论成立.

**推论 1.3.1**  $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ .

**引理 1.3.1** 设  $X(t)$  表示时间间隔  $[0, t]$  中到达某服务台

的顾客数,  $\{J_n, n \geq 1\}$  为顾客到达的间隔时间序列, 且为独立同服从均值为  $\frac{1}{\lambda}$  的指数分布随机变量序列. 则对任意  $n$  个时间  $t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > 0$  与  $n$  个整数  $k_n \geq k_{n-1} \geq \cdots \geq k_1 \geq 0$ , 有

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \cdots, X(t_n) = k_n\} \\ = \prod_{i=2}^n e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} \cdot e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}.$$

证明见[2].

**定理 1.3.2** 设  $\{J_n, n \geq 1\}$ ,  $\{X(t), t \geq 0\}$  为由引理 1.3.1 给出的间隔时间序列和随机过程. 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  为具有参数  $\lambda$  的泊松过程.

**证** 由引理 1.3.1 知, 对任意  $t \geq 0$ , 有

$$P\{X(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

所以

$$P\{X(0)=0\} = 1 - P\{X(0) > 0\} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right] \Big|_{t=0} \\ = 1 - 0 = 1,$$

即  $X(0) = 0$ .

对任意  $s, t \geq 0$  与非负整数  $n$ , 由引理 1.3.1, 有

$$P\{X(s+t) - X(s) = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(s+t) - X(s) = n, X(s) = k\} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(s+t) = n+k, X(s) = k\} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

即

$$P\{X(s+t) - X(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

对任意  $n$  个参数  $t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > t_0 = 0$  以及非负整数  $k_n, k_{n-1}, \cdots, k_1$  有

$$\begin{aligned}
& P\{X(t_1) - X(t_0) = k_1, X(t_2) - X(t_1) = k_2, \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = k_n\} \\
&= P\left\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_1 + k_2, \dots, X(t_n) = \sum_{i=1}^n k_i\right\} \\
&= \prod_{i=2}^n e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \\
&= \prod_{i=1}^n P\{X(t_i) - X(t_{i-1}) = k_i\},
\end{aligned}$$

即  $\{X(t), t \geq 0\}$  的增量具有独立性. 从而本定理得证.

设  $\{X(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松过程, 在实际问题中  $X(t)$  可表为在  $[0, t]$  中更新某零件的个数, 则  $J_i$  表示第  $i$  个零件的寿命,  $\lambda$  为单位时间内更新该种零件的平均数. 对任意时间  $t > 0$  且  $t \neq \tau_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , 令

$$\alpha_t = t - \tau_{X(t)}, \beta_t = \tau_{X(t)+1} - t.$$

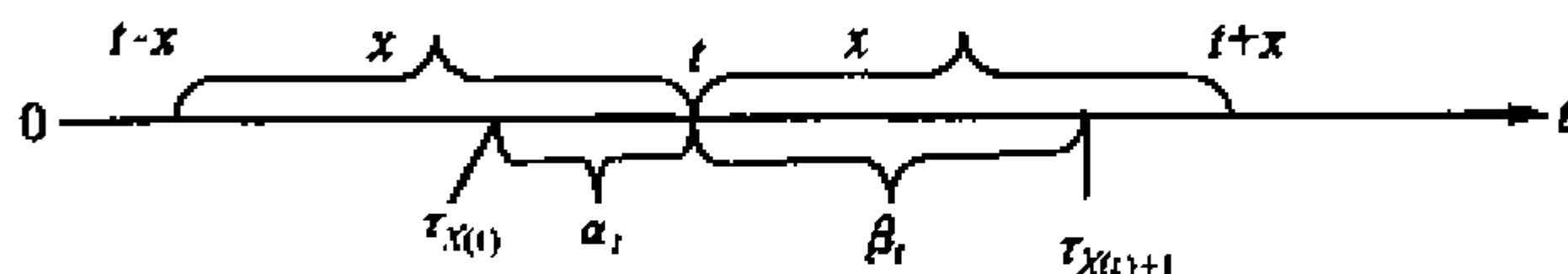


图 1-2

则称  $\alpha_t$  为时刻  $t$  时零件的年龄, 称  $\beta_t$  为时刻  $t$  时零件的剩余寿命.

**定理 1.3.3** (1)  $\beta_t$  的分布与  $t$  无关且  $\beta_t \sim \Gamma(1, \lambda)$ ,

$$(2) \alpha_t \text{ 的分布函数为 } F_{\alpha_t}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

**证** 当  $x > 0$  时, 因为

$$\begin{aligned}
P\{\beta_t < x\} &= P\{X(t+x) - X(t) > 0\} \\
&= 1 - P\{X(t+x) - X(t) = 0\} \\
&= 1 - e^{-\lambda x},
\end{aligned}$$

当  $x \leq 0$  时, 显然有  $P\{\beta_t < x\} = 0$ . 从而 (1) 得证.

(2) 因为

$$P\{\alpha_t = t\} = P\{J_{X(t)+1} > t\} = P\{J_1 > t\} = e^{-\lambda t},$$

当  $0 < x \leq t$  时, 有

$$P\{\alpha_t < x\} = P\{X(t) - X(t-x) > 0\} = 1 - P\{X(t) - X(t-x) = 0\} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

当  $x \leq 0$  时, 显然有  $P\{\alpha_t < x\} = 0$ . 当  $x > t$  时, 显然有  $P\{\alpha_t < x\} = 1$ . 从而(2)得证.

由上定理知  $F_{\alpha_t}(x)$  在  $x = t$  处有第一类间断点, 在其它地方均连续, 所以  $\alpha_t$  既不是连续型随机变量, 也不是离散型随机变量.

但是  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{\alpha_t}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$  为指数分布函数.

## § 1.4 伯努利(Bernoulli)过程

**定义 1.4.1** 称随机序列  $\{N(n), n \geq 0\}$  为参数是  $\lambda (0 < \lambda < 1)$  的伯努利过程. 如果它满足下列三个条件:

(1)  $N(0) = 0$ ,

(2)  $\{N(n), n \geq 0\}$  具有独立增量性,

(3)  $N(n+m) - N(m) \sim B(n, \lambda)$ , 其中  $m, n$  均为非负整数, 即,

$$P\{N(n+m) - N(m) = k\} = C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n, \bar{\lambda} = 1 - \lambda.$$

由此定义知, 对任意非负整数  $n$ , 有

$$E[N(n)] = n\lambda, D[N(n)] = n\lambda\bar{\lambda},$$

其中  $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ . 且  $\{N(n), n \geq 0\}$  的增量具有平稳性.

**定理 1.4.1** 设  $J_i, i \geq 1$  为参数是  $\lambda$  的伯努利过程  $\{N(n), n \geq 0\}$  的间隔时间序列, 则  $\{J_i, i \geq 1\}$  是  $i, i, d$  随机序列, 且  $P\{J_1 = k\} = \lambda \bar{\lambda}^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots$ , 即  $J_i \sim \text{Geo}(\lambda)$ .

**证** 定义 1.4.1 知, 对任意正整数  $k$ , 有

$$\begin{aligned} P\{J_1 = k\} &= P\{N(k-1) = 0, N(k) = 1\} \\ &= P\{N(k) - N(k-1) = 1, N(k-1) = 0\} \\ &= P\{N(k) - N(k-1) = 1\} P\{N(k-1) = 0\} \\ &= C_1^1 \lambda^1 \bar{\lambda}^{1-1} \cdot C_{k-1}^0 \lambda^0 \bar{\lambda}^{k-1} = \lambda \bar{\lambda}^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

又当  $n > 1$  时, 对任意正整数  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k$ , 有

$$\begin{aligned}
 & P\{J_n = k \mid J_i = k_i, J \leq i \leq n-1\} \\
 &= P\left\{N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k - 1\right) = 1, \right. \\
 &\quad \left. N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k - 1\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right) = 0\right\} \\
 &= P\left\{N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k - k\right) = 1\right\} \\
 &\quad \cdot P\left\{N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k - 1\right) - N\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right) = 0\right\} \\
 &= \lambda \bar{\lambda}^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

此示  $J_n$  与  $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$  相互独立, 且  $J_n \sim \text{Geo}(\lambda)$ , 从而定理得证.

**引理 1.4.1** 设  $\{J_i, i \geq 1\}$  为输入过程  $\{N(n), n \geq 0\}$  的到达间隔时间序列, 且  $\{J_i, i \geq 1\}$  独立同分布,  $J_i \sim \text{Geo}(\lambda)$  则对整数:  $n_{i+1} > n_i \geq 0$  与

$$n_{i+1} \geq k_{i+1} \geq k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m-1,$$

有

$$\begin{aligned}
 & P\{N(n_1) = k_1, N(n_2) = k_2, \dots, N(n_m) = k_m\} \\
 &= C_{n_1}^{k_1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{n_1-k_1} \prod_{i=2}^m C_{n_i-n_{i-1}}^{k_i-k_{i-1}} \lambda^{k_i-k_{i-1}} \bar{\lambda}^{n_i-n_{i-1}-(k_i-k_{i-1})}.
 \end{aligned}$$

**证** 当  $m = 1$  时, 因为  $\{N(n_1) \geq k_1\} = \{\tau_{k_1} \leq n_1\}$ , 其中

$\tau_{k_1} = \sum_{i=1}^{k_1} J_i$  为第  $k_1$  个顾客到达的时刻, 所以

$$\begin{aligned}
 P\{N(n_1) = k_1\} &= P\{N(n_1) \geq k_1\} - P\{N(n_1) \geq k_1 + 1\} \\
 &= P\{\tau_{k_1} \leq n_1\} - P\{\tau_{k_1+1} \leq n_1\} \\
 &= \sum_{j=k_1}^{n_1} C_{j-k_1}^{k_1-1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{j-k_1} - \sum_{j=k_1+1}^{n_1} C_{j-k_1-1}^{k_1+1} \lambda^{k_1+1} \bar{\lambda}^{j-k_1-1}, \\
 &= C_{n_1}^{k_1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{n_1-k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1
 \end{aligned}$$



假设  $m = t - 1$  时, 结论成立. 由全概率公式, 得

$$\begin{aligned}
 & P\{N(n_1) = k_1, N(n_2) = k_2, \dots, N(n_t) = k_t\} \\
 &= P\{\tau_{k_1} \leq n_1, \tau_{k_1+1} > n_1, \tau_{k_2} \leq n_2, \tau_{k_2+1} > n_2, \dots, \tau_{k_t} \leq n_t, \tau_{k_t+1} > n_t\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} P\{J_{k_1+1} > n_1 - i, J_{k_1+1} + \dots + J_{k_2} \leq n_2 - i, J_{k_1+1} + \dots \\
 &+ J_{k_2+1} \geq n_2 - i, \dots, J_{k_1+1} + \dots + J_{k_t} \leq n_t - i, J_{k_1+1} + \dots + J_{k_t+1} > n_t \\
 &\quad - i\} P\{\tau_{k_1} = i\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i} P\{J_{k_1+2} + \dots + J_{k_2} \\
 &\leq n_2 - i - j, J_{k_1+2} + \dots + J_{k_2+1} > n_2 - i - j, \dots, J_{k_1+2} + \dots + J_{k_t} \leq n_t - i - j, \\
 &\quad J_{k_1+2} + \dots + J_{k_t+1} > n_t - i - j\} \cdot P\{\tau_{k_1} = i\} P\{J_{k_1+1} = j\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i} P\{\tau_{k_2-k_1-1} \leq n_2 - i - j, \tau_{k_2-k_1} > n_2 - i - j, \dots, \\
 &\quad \tau_{k_t-k_t-1} \leq n_t - i - j, \tau_{k_t-k_t} > n_t - i - j\} P\{\tau_{k_1} = i\} \\
 &\quad \cdot P\{J_{k_1+1} = j\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i} P\{N(n_2 - i - j) \\
 &= k_2 - k_1 - 1, \dots, N(n_t - i - j) = k_t - k_1 - 1\} \cdot P\{\tau_{k_1} = i\} \\
 &\quad \cdot P\{J_{k_1+1} = j\} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i} C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1} \lambda^{k_2-k_1-1} \bar{\lambda}^{n_2-i-j-k_2+k_1+1} \cdot \prod_{r=3}^t C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}} \\
 &\quad \lambda^{k_r-k_{r-1}} \bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})} C_{i-1}^{k_1-1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{i-k_1} \lambda^{k_2} \bar{\lambda}^{n_2-k_2} = \prod_{r=3}^t C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}} \\
 &\quad \cdot \lambda^{k_r-k_{r-1}} \bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i} C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1} C_{i-1}^{k_1-1} \lambda^{k_2} \bar{\lambda}^{n_2-k_2} \\
 &= \prod_{r=3}^t C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}} \lambda^{k_r-k_{r-1}} \bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2-n_1}^{k_2-k_1} \lambda^{k_2} \bar{\lambda}^{n_2-k_2}
 \end{aligned}$$

$$= C_{n_1}^{k_1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{n_1-k_1} \prod_{r=2}^l C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}} \lambda^{k_r-k_{r-1}} \bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}.$$

此示  $m = l$  时结论也成立. 由数学归纳法, 引理 1.4.1 得证.

**定理 1.4.2** 设  $\{J_i, i \geq 1\}$  为输入随机序列  $\{N(n), n \geq 0\}$  的到达间隔时间序列, 且  $\{J_i, i \geq 1\}$  为独立同分布序列,  $J_1 \sim \text{Geo}(\lambda)$ . 则  $\{N(n), n \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的伯努利过程.

**证** 因为对任意非负整数  $n$  和  $k (k \leq n)$  有

$$P\{N(n) = k\} = C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

所以  $P\{N(0) > 0\} = \sum_{k=1}^0 P\{N(0) = k\} = 0$ . 从而  $P\{N(0) = 0\} = 1$ , 即

$N(0) = 0$ . 又因对任意整数  $m, n \geq 0$  与  $k (n \geq k \geq 0)$ , 由引理 1.4.1, 得

$$\begin{aligned} P\{N(m+n) - N(m) = k\} &= \sum_{i=0}^m P\{N(m+n) = k+i, N(m) = i\} \\ &= \sum_{i=0}^m C_m^i \lambda^i \bar{\lambda}^{m-i} C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k} = C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

故对任意  $m$  个整数:  $n_m > n_{m-1} > \dots > n_1 > n_0 = 0$  和满足:  $\sum_{i=1}^l k_i$

$\leq n_l (l = 1, 2, \dots, m)$  的非负整数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 由引理 1.4.1, 得

$$P\{N(n_1) - N(n_0) = k_1, N(n_2) - N(n_1) = k_2, \dots, N(n_m) - N(n_{m-1}) = k_m\}$$

$$= P\left\{N(n_1) = k_1, N(n_2) = k_1 + k_2, \dots, N(n_m) = \sum_{i=1}^m k_i\right\}$$

$$= C_{n_1}^{k_1} \lambda^{k_1} \bar{\lambda}^{n_1-k_1} \prod_{i=2}^m C_{n_i-n_{i-1}}^{k_i} \lambda^{k_i} \bar{\lambda}^{n_i-n_{i-1}-k_i}$$

$$= \prod_{i=1}^m P\{N(n_i) - N(n_{i-1}) = k_i\}.$$

此示,  $\{N(n), n \geq 0\}$  具有增量独立性, 由定义 1.4.1 本定理得证.

## § 1.5 马尔可夫过程

### 1.5.1 马氏(Markov)过程的定义

马尔可夫过程是一类很重要的随机过程. 这一类过程的特点

是:当过程在时刻  $t_0$  所处状态已知时,  $t_0$  以后过程所处的状态与  $t_0$  以前过程所处状态无关. 这个特性叫做无后效应, 也叫马尔可夫性. 通俗地说, 就是“已知现在, 将来和过去无关”.

**定义 1.5.1** 设  $\{X(t), t \in T\}$  为一随机过程.  $t_i \in T, i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . 如果对状态空间  $S$  中的任意状态  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X(t_n)$  的条件分布函数满足:

$$\begin{aligned} &P\{X(t_n) < x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, X(t_1) = x_1\} \\ &= P\{X(t_n) < x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, \quad x \in R, \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  具有无后效应性或马氏性, 并称  $\{X(t), t \in T\}$  为马尔可夫过程, 简称为马氏过程.

一般记  $P\{X(t_n) < x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$  为  $F(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x)$ , 即

$$F(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x) = P\{X(t_n) < x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, \quad (1.5.2)$$

称它为马氏过程的转移概率分布. 它满足切普曼-柯尔莫哥洛夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程:

$$\begin{aligned} F(s, x; t, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u, z; t, y) d_z F(s, x; u, z), \\ s &< u < t < T, \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

其中  $d_z F(s, x; u, z)$  表示对  $F(s, x; u, z)$  关于变量  $z$  微分.

**证** 由全概率公式得

$$\begin{aligned} &F(s, x; t, y) = P\{X(t) < y | X(s) = x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X(t) < y | X(u) = z, X(s) = x\} d_z P\{X(u) < z | X(s) = x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X(t) < y | X(u) = z\} d_z P\{X(u) < z | X(s) = x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u, z; t, y) d_z F(s, x; u, z). \end{aligned}$$

**定义 1.5.2** 设随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的状态空间  $S$  为  $R$  中的可列集. 如果对  $T$  中任意  $n$  个  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  以及使

$$P\{X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} > 0$$

的状态  $i_k \in S, k = 1, 2, \dots, n-1$ , 与状态  $i_n \in S$  均有

$$P\{X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, X(t_1) = i_1\}$$

$$= P\{X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}, \quad (1.5.4)$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  为马尔可夫链, 简称为马氏链. 如果  $T$  还是可列离散集, 则称  $\{X(t), t \in T\}$  为离散参数马氏链. 如果  $T$  是连续参数集, 则称  $\{X(t), t \in T\}$  为连续参数马氏链.

### 1.5.2 连续参数马氏链

对连续参数马氏链. 一般设其状态空间为  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$  或  $I_N = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . 设参数集  $T = [0, +\infty)$ . 因此,  $\{X(t), t \in T\}$  可以写成  $\{X(t), t \geq 0\}$ , 并记  $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$  为  $p_{ij}(s, t)$ , 即

$$p_{ij}(s, t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}, i, j \in I, s, t \geq 0, \quad (1.5.5)$$

如转移概率(条件概率)  $p_{ij}(s, t)$  只与  $t$  有关, 而与  $s$  无关, 则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为连续参数齐次马尔可夫链, 并记  $p_{ij}(s, t)$  为  $p_{ij}(t)$ , 即

$$p_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\},$$

$i, j \in I, t \geq 0.$  (1.5.6)

显然, 有

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\geq 0, \quad i, j \in I, \quad t \geq 0, \\ \sum_{j \in I} p_{ij}(t) &= 1. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

我们规定

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (1.5.8)$$

今后如不特别说明本章涉及的马氏链均指连续参数齐次马氏链.

(1.5.6) 式可写成矩阵形式:

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i, j \in I}, \quad t \geq 0, \quad (1.5.9)$$

设  $s, t \geq 0, i, j \in I$ , 则由全概率公式得

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= P\{X(s+t) = j \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{X(s+t) = j, X(s) = k \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{X(s+t) = j \mid X(s) = k\} P\{X(s) = k \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \end{aligned}$$

即

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad i, j \in I, s, t \geq 0, \quad (1.5.10)$$

称上式为连续参数齐次马氏链的 C-K (Chapman-Kolmogorov) 方程. 也可把它写成如下的矩阵形式:

$$P(s+t) = P(s)P(t), \quad s, t \geq 0. \quad (1.5.11)$$

**定理 1.5.1** 由(1.5.6)式给出的  $p_{ij}(t)$  是  $t$  的一致连续函数 ( $t \geq 0$ ).

**证** 对任意  $h > 0$ , 有

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_{k \in I} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= p_{ii}(h) p_{ij}(t) - p_{ij}(t) + \sum_{k \in I, k \neq j} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \\ &= -[1 - p_{ii}(h)] p_{ij}(t) + \sum_{k \in I, k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \\ &\geq -[1 - p_{ii}(h)] p_{ij}(t) \geq -[1 - p_{ii}(h)]. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

由(1.5.12)式又有

$$p_{ij}(h+t) - p_{ij}(t) \leq \sum_{k \in I, k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \leq \sum_{k \in I, k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h).$$

所以

$$|p_{ij}(h+t) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h) \rightarrow 0, \quad (\text{当 } h \rightarrow 0+0 \text{ 时}).$$

对  $h < 0$  ( $h+t \geq 0$ ) 同理可证上式成立. 从而  $p_{ij}(t)$  是  $t$  的一致连续函数.

$$\text{定理 1.5.2} \quad (1) \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{t} [1 - p_{ii}(t)] = q_i, \quad i \in I,$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}, \quad i, j \in I, j \neq i,$$

其中  $q_{ij} = p_{ij}q_i$ ,  $p_{ij} = P\{X(T_i) = j \mid X(0) = i\}$ ,  $T_i$  为链在状态  $i$  停留的时间(然后链进入状态  $j$ ),

$$q_i = \frac{1}{E(T_i)}.$$

**证** 由[3]的引理 5.1.1 与引理 5.1.2 可证. 由定理 1.5.2 知

$$q_{ij} = p_{ij}q_j \leq q_i, \quad \sum_{j \in I, j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \in I, j \neq i} p_{ij}q_i \leq q_i.$$

当  $j \neq i$  时, 由(1.5.8)

$$0 \leq q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t - 0} = p'_{ij}(0),$$

且

$$0 \leq q_i = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t - 0} = - \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{p_{ii}(t) - p_{ii}(0)}{t - 0} = -p'_{ii}(0),$$

即

$$\begin{cases} p'_{ii}(0) = -q_i, & i \in I \\ p'_{ij}(0) = q_{ij}, & i, j \in I, j \neq i \end{cases} \quad (1.5.13)$$

记  $q_{ii} = -q_i$ . 则称矩阵

$$Q \equiv [q_{ij}]_{i,j \in I} = [p'_{ij}(0)]_{i,j \in I} \quad (1.5.14)$$

为转移概率矩阵  $p(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in I}$  的密度矩阵或称为  $Q$  矩阵.

由(1.5.14) 式知,  $q_{ij}$  是  $p_{ij}(t)$  在 0 点的右导数.

**定理 1.5.3** 对任意状态  $j \in I$ , 如果  $q_j < \infty$ ,  $q_j = \sum_{k \in I, k \neq j} q_{jk}$

且  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{t} p_{ij}(t) = q_{ij}$ ,  $i \neq j$  关于  $i \in I$  一致成立, 则

$$P'_j(t) = -q_j p_j(t) + \sum_{k \in I, k \neq j} p_k(t) q_{kj}, \quad j \in I, \quad (1.5.15)$$

其中  $p_j(t) = P\{X(t) = j\}$ ,  $t \geq 0$ . 称(1.5.15) 为柯氏前进方程.

**证** 这里仅给出  $I$  为有限时的证明. 因为

$$\begin{aligned} p_j(t + \Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = j\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = k\} P\{X(t) = k\} \\ &= \sum_{k \in I} p_{kj}(\Delta t) p_k(t), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{p_j(t + \Delta t) - p_j(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{k \in I} p_k(t) p_{kj}(\Delta t) - p_j(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[ p_j(t) p_{jj}(\Delta t) - p_j(t) + \sum_{k \in I, k \neq j} p_k(t) p_{kj}(\Delta t) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{p_{jj}(\Delta t) - 1}{\Delta t} p_j(t) + \sum_{k \in I, k \neq j} p_k(t) \cdot \frac{p_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令  $\Delta t \rightarrow 0^+$ , 由定理 1.5.2 和定理假设得

$$p'_j(t) = -q_j p_j(t) + \sum_{k \in I, k \neq j} p_k(t) q_{kj}.$$

**定理 1.5.4** 如果存在  $t_0 > 0$  使得对任意  $i, r \in I$ , 有  $p_{ir}(t_0) > 0$ , 则对任意  $i, j \in I$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

与  $i$  无关. 证明见 [3] 中定理 5.1.4.

**定理 1.5.5** 如存在  $t_0 > 0$  使得对任意  $i, r \in I$  有  $p_{ir}(t_0) > 0$ , 则

$$(1) \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \pi_j, j \in I,$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow \infty} p'_j(t) = 0, j \in I.$$

**证** (1) 这里仅就  $I$  为有限集证明.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\} P\{X(0) = i\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} P_{ij}(t) P\{X(0) = i\} \\ &= \sum_{i \in I} \pi_i P\{X(0) = i\} = \pi_j \end{aligned}$$

**证** (2) 如果存在  $j \in I$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_j(t) = c_j \neq 0$ , 则当  $c_j > 0$  时, 取  $a_j$  使得  $c_j > a_j > 0$ . 于是存在  $t_0 \geq 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时  $p'_j(t) \geq a_j$ . 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [p_j(t_0) + \int_{t_0}^t p'_j(\tau) d\tau] \geq p_j(t_0) + a_j \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t d\tau = \infty,$$

此与  $p_j(t) \leq 1$  矛盾. 当  $c_j < 0$  时类似可推出矛盾, 从而 (2) 得证.

由定理 1.5.3 与定理 1.5.5 得

$$\sum_{k \in I} \pi_k q_{kj} = 0, j \in I, \text{ 即 } \pi Q = 0, \quad (1.5.16)$$

其中  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ . 如果  $\sum_{k \in I} \pi_k = 1$ , 则称  $\{\pi_k, k \in I\}$  为马

氏链的平稳分布. 即由方程  $\pi Q = 0$  与  $\sum_{k \in I} \pi_k = 1$  可解得极限分布

$$\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t), k \in I. \quad (1.5.17)$$

**定义 1.5.3(生灭过程)** 设  $\{X(t), t \geq 0\}$  为具有状态空间  $I$  (或  $I_N$ ) 的连续参数齐次马氏链. 如果其转移概率  $p_{ij}(t)$  满足: 对任意  $i, j \in I$ ,

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t), \lambda_i > 0, \\ p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t), \mu_0 = 0, \text{当 } i \geq 1 \text{ 时 } \mu_i > 0, \\ p_{ii}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \\ p_{ij}(t) = o(t), |j - i| \geq 2, \end{cases} \quad (1.5.18)$$

则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为生灭过程. 生灭过程的状态是相通的. 易见有  $q_i = \lambda_i + \mu_i, q_{i,i+1} = \lambda_i, q_{i,i-1} = \mu_i, q_{ij} = 0, |j - i| \geq 2$ . 生灭过程的密度( $Q$ )矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (1.5.19)$$

如果连续参数齐次马氏链的密度矩阵  $Q = [q_{ij}]$  满足: 对一切  $i \in S$  有

$$\sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty, \quad (1.5.20)$$

则称  $Q$  或连续参数齐次马氏链是保守的. 并称矩阵

$$R = [r_{ij}], \text{ 其中 } r_{ij} = \begin{cases} (1 - \delta_{ij}) \frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0, \\ \delta_{ij}, & q_i = 0 \end{cases} \quad (1.5.21)$$

为相应于  $Q$  的跳跃矩阵. 称以  $R$  为转移概率矩阵的离散参数马氏链为原连续参数马氏链的跳跃链.

由定义 1.5.3 知, 生灭过程(的  $Q$  矩阵)是保守的, 其跳跃矩



阵为

$$R = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{p}_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \bar{p}_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \bar{p}_3 & 0 & p_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (1.5.22)$$

其中  $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$ ,  $\bar{p}_i = 1 - p_i$ ,  $i \geq 1$ . 当  $\lambda_0 = 0$  时,  $r_0 = 1$ ,  $p_0 = 0$ , 当  $\lambda_0 > 0$  时,  $r_0 = 0$ ,  $p_0 = 1$ .

如果生灭过程满足条件  $\mu_i \equiv 0$ , 则称它为纯生过程. 如果生灭过程满足条件  $\lambda_i \equiv 0$ , 则称它为纯灭过程. 生灭过程的前进柯氏方程为

$$\begin{cases} p'_j(t) = -(\lambda_j + \mu_j)p_j(t) + \lambda_{j-1}p_{j-1}(t) + \mu_{j+1}p_{j+1}(t), j \geq 1, \\ p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t). \end{cases} \quad (1.5.23)$$

如果在时刻 0 过程处于状态  $i \in I$ , 则上方程的初始条件为  $p_i(0) = 1$ ,  $p_k(0) = 0$ ,  $k \neq i$ . 如果生灭过程的平稳分布  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  存在, 由 (1.5.16), 它应满足方程组:

$$\begin{cases} -(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0, j = 1, 2, 3, \cdots, \\ -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0, \\ \sum_{k \in I} \pi_k = 1, \end{cases} \quad (1.5.24)$$

由第一式得

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} - \lambda_j\pi_j = \mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1} = \cdots = \mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0.$$

由第二式得  $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$ , 从而得

$$\pi_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0. \quad (1.5.25)$$

由 (1.5.24) 中的第三式得

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}\right)^{-1}, \quad (1.5.26)$$

从而知级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$ . 反之如果  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$ , 则生灭过程的平稳分布存在, 且由(1.5.25) 与(1.5.26) 式确定.

## § 1.6 更新过程

### 1.6.1 定义与有关概念

设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  为相互独立非负的随机变量, 且  $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots$  同分布,  $\xi_1$  的分布函数记为  $F_1(t)$ ,  $\xi_2$  的分布函数记为  $F(t)$ , 令

$$s_0 = 0, s_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6.1)$$

**定义 1.6.1** 记  $N(t) = \max \{n : s_n < t\}$ ,  $N(0) = 0, t \geq 0$ , 则称  $\{N(t), t \geq 0\}$  为一般更新过程; 如果  $F_1(t) \equiv F(t)$ , 则称  $\{N(t), t \geq 0\}$  为更新过程, 称  $F(t)$  为更新分布, 称  $F_1(t)$  为首次更新分布.

由此定义, 显然有

$$\begin{cases} \{N(t) = 0\} = \{S_1 \geq t\}, \\ \{N(t) = n\} = \{S_n < t, S_{n+1} \geq t\}, \\ \{N(t) < n\} = \{S_n \geq t\}. \end{cases} \quad (1.6.2)$$

在实际中,  $N(t)$  一般表示在时间区间  $[0, t]$  中更新某设备中相同元件的次数,  $\xi_n$  为第  $n$  个元件的寿命,  $S_n$  为第  $n$  个元件更新的时刻. 如果在  $t = 0$  时安装了一个新的元件, 则  $\{N(t), t \geq 0\}$  就是更新过程, 如果在  $t = 0$  时, 已有一个元件在运行(工作), 则  $\{N(t), t \geq 0\}$  就是一般更新过程. 记

$$m(t) = E[N(t)], \quad t \geq 0. \quad (1.6.3)$$

则称  $m(t)$  为更新函数.

由(1.6.2)得

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n < t\}.$$

从而

$$\begin{aligned} m(t) &= E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n < t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t), \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

其中  $F^{n*}(t)$  为  $F(t)$  的  $n(n \geq 1)$  重卷积,  $F^{0*}(t) = U(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$

$$F^{n*}(t) = \int_0^t F^{(n-1)*}(t-x) dF(x), n \geq 1, \quad (1.6.5)$$

因为

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t) \\ &= F_1(t) * [F^{0*}(t) + F(t) + F(t) * F(t) \\ &\quad + F^{3*}(t) + F^{4*}(t) + \cdots] \\ &= F_1(t) * U(t) + F_1(t) * F(t) * [F^{0*}(t) + F(t) \\ &\quad + F^{2*}(t) + F^{3*}(t) + \cdots] \\ &= F_1(t) + F(t) * \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t) = F_1(t) + F(t) * m(t), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} m(t) &= F_1(t) + \int_0^t F(t-x) dm(t) \\ &= F_1(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x), \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

称更新函数  $m(t)$  满足的此方程为更新方程, 它的解在有限区间上是有界惟一的, 并由 (1.6.4) 给出.

记  $F_1(t), F(t)$  的 LST 分别为  $f_1(s)$  与  $f(s)$ ,  $m(t)$  的 LST 为  $u(s)$ , 即

$$\begin{aligned} u(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t), f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t), \\ f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t), R_e(s) > 0, \end{aligned}$$

则由(1.6.6)得

$$\begin{aligned} u(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) * m(t) \\ &= f_1(s) + f(s)u(s), \end{aligned}$$

(因为卷积的 LST 为 LST 的乘积), 即

$$u(s) = \frac{f_1(s)}{1 - f(s)}, R_e(s) > 0. \quad (1.6.7)$$

称一般更新过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  是平稳的, 如果

$$b \equiv \int_0^{\infty} t dF(t) < \infty, F_1(t) = \frac{1}{b} \int_0^t [1 - F(x)] dx, \quad t \geq 0.$$

这是因为

$$f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1 - F(t)}{b} dt = \frac{1 - f(s)}{bs},$$

所以, 由(1.6.7)得

$$u(s) = \frac{1}{bs}. \quad (1.6.8)$$

从而

$$m(t) = \frac{t}{b}.$$

## 1.6.2 更新定理

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $m(t)$  的性态是更新理论关心的中心问题, 其性态由下面的更新定理给出. 下面这些更新定理是关于更新过程给出的, 但是它们对一般更新过程也成立.

### 定理 1.6.1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty, \end{cases}$$

其中  $b = \int_0^{\infty} t dF(t)$ .

证 因为  $S_{N(t)} < t \leq S_{N(t)+1}$ , 所以

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)},$$

记  $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ . 又因

$$\begin{aligned} P\{N(\infty) < \infty\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(\infty) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n < \infty, S_{n+1} \geq \infty\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi_{n+1} = \infty\} = 0, \quad (\text{因 } P\{\xi_{n+1} < \infty\} = F(\infty) = 1) \end{aligned}$$

从而  $P\{N(\infty) = \infty\} = 1$ . 由强大数定律有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i = E(\xi_2) = b, \text{ a.s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} = b, \text{ a.s.}$$

所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = b$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty. \end{cases}$

**定理 1.6.2 (基本更新定理)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty. \end{cases} \quad (1.6.9)$$

**证** 当  $b < \infty$  时, 因为  $S_{N(t)+1} = t + \xi_+$ ,

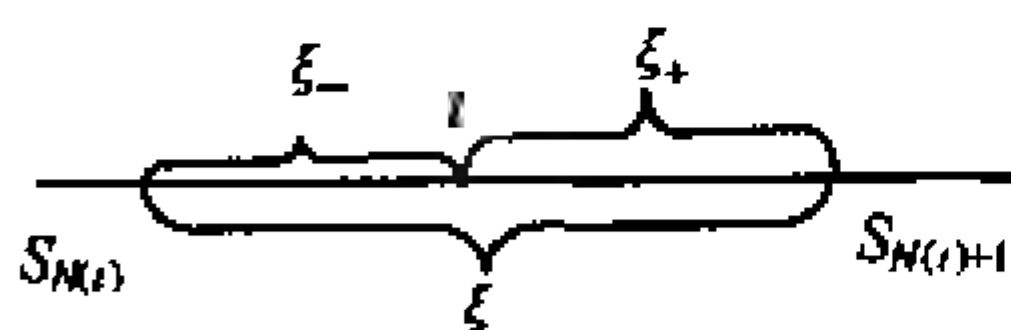


图 1-3

其中  $\xi_+$  为一个元件的剩余寿命(见

图 1-3). 故  $E[S_{N(t)+1}] = t + E[\xi_+]$ .

又因  $E[S_{N(t)+1}] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i\right] =$

$E[N(t)+1]E(\xi_1) = bE[N(t)+1] = b[m(t)+1]$ , 从而

$$\frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{b} + \frac{E(\xi_+)}{bt} \geq \frac{1}{b} \quad (\text{因 } E(\xi_+) \geq 0) \quad (1.6.10)$$

故

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{b}. \quad (1.6.11)$$

$$\text{令} \begin{cases} \overline{\xi}_n = \begin{cases} \xi_n, & \xi_n \leq A \\ 0, & \xi_n > A \end{cases} \\ \overline{S}_n = \sum_{i=1}^n \overline{\xi}_i, n \geq 1, A \text{ 为任意正数} \\ \overline{N}(t) = \max \{n : \overline{S}_n \leq t\}, \overline{m}(t) = E[\overline{N}(t)], t \geq 0. \end{cases}$$

$\overline{\xi}_+$  为  $\{\overline{N}(t), t \geq 0\}$  中元件的剩余寿命. 易见  $\overline{\xi}_+ < A$ . 由 (1.6.10) 得

$$\frac{\overline{m}(t)}{t} + \frac{1}{t} \leq \frac{A}{b_A t} + \frac{1}{b_A},$$

其中  $b_A = E(\overline{\xi}_n) \leq b < \infty$ . 因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{b_A}. \quad (1.6.12)$$

但是, 由于  $\overline{S}_n \leq S_n$ , 故  $N(t) \leq \overline{N}(t)$ , 从而有  $m(t) \leq \overline{m}(t)$ . 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{b_A}. \quad (1.6.13)$$

由于  $A$  的任意性, 令  $A \rightarrow \infty$ , 则有

$$b_A = \int_0^\infty x dF(x) \rightarrow \int_0^\infty x dF(x) = b$$

和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{b}. \quad (1.6.14)$$

由 (1.6.11) 与 (1.6.14) 立得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{b}$ .

当  $b = \infty$  时, 仍利用上述的更新过程  $\{\overline{N}(t), t \geq 0\}$ , 由 (1.6.14), 当  $A \rightarrow \infty$  时, 由于  $b_A \rightarrow \infty$ , 立得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = 0$ ; 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = 0$ , 定理 1.6.2 证毕.

**定理 1.6.3 (关键更新定理)** 设  $Q(t)$  在区间  $[0, \infty)$  内是一个非负、不增函数, 且

$$\int_0^{\infty} Q(t) dt < \infty.$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t - \tau) dm(\tau) = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} Q(t) dt. \quad (1.6.15)$$

若  $b = \infty, \frac{1}{b} \equiv 0$ .

**定理 1.6.4** 如果  $F(t)$  不是格子分布函数, 则对每个  $h > 0$  有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t) - m(t - h)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

如果 
$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k U(t - k\tau), \quad (1.6.17)$$

其中  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, p_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, p_0 = 0$ , 且  $\tau$  是一个正常数 (称为周期), 则称  $F(t)$  为格子分布函数.

**证** 在定理 1.6.3 中, 令

$$Q(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < h, \\ 0, & t > h. \end{cases}$$

则由 (1.6.15) 得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t - \tau) dm(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-h}^t dm(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} [m(t) - m(t - h)] = \\ &= \frac{1}{b} \int_0^h dt = \frac{h}{b}, \text{ 即 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t) - m(t - h)}{h} = \frac{1}{b}. \text{ 定理证毕.} \end{aligned}$$

### 1.6.3 年龄与剩余寿命的分布

在任意时刻  $t (t > 0)$  记

$$\begin{cases} \xi_-(t) = t - S_{N(t)}, \\ \xi_+(t) = S_{N(t)+1} - t. \end{cases} \quad (1.6.18)$$

称  $\xi_-(t), \xi_+(t)$  分别为时刻  $t$  时元件 (随机变量  $\xi$ ) 的年龄与剩余寿命.  $\xi_-(t)$  表示从  $t$  之前的上一个更新瞬时刻到  $t$  之间这一段时间的长,  $\xi_+(t)$  表示从  $t$  到  $t$  之后的下一个更新瞬时刻之间这一

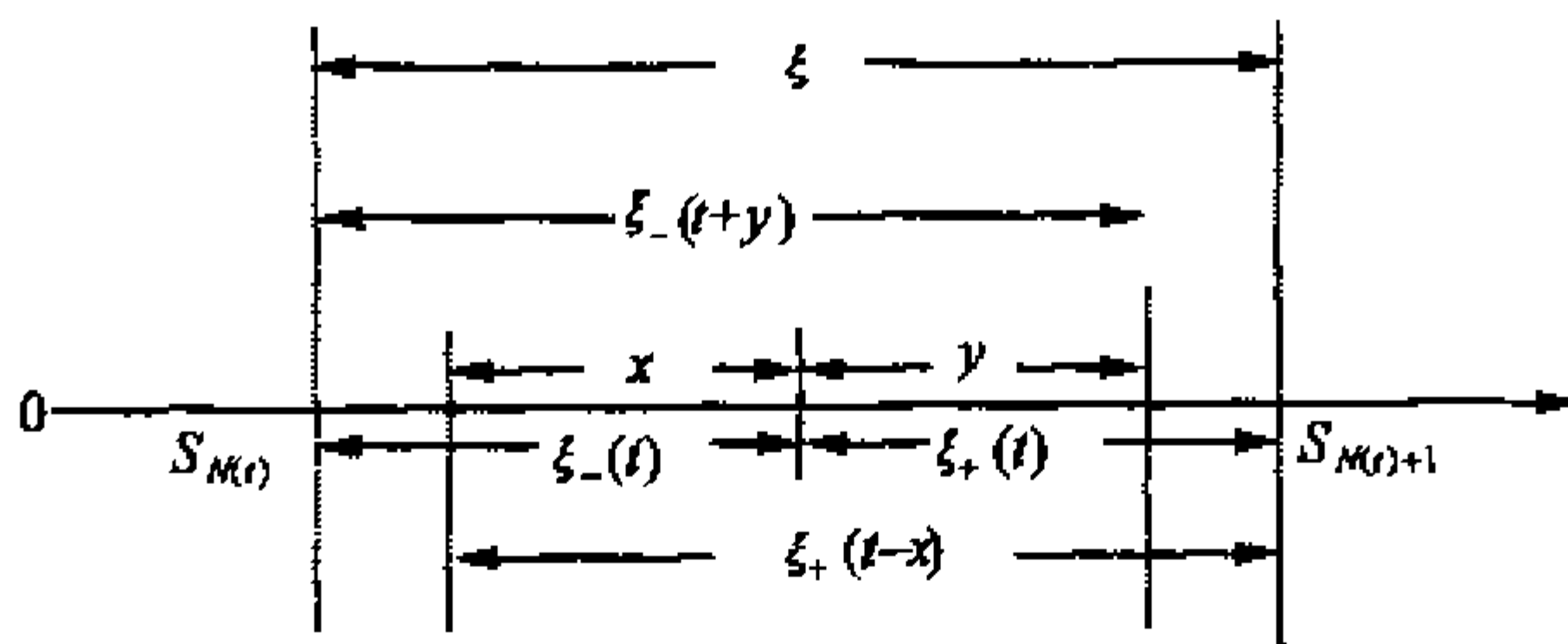


图 1-4

段时间的长(见图 1-4).

现考虑  $\xi_-(t)$  的分布. 显然有  $0 \leq \xi_-(t) \leq t$ , 且对于任意  $x \in (0, t]$ , 由全概率公式与(1.6.2)有

$$\begin{aligned}
 P\{\xi_-(t) < x\} &= P\{t - S_{N(t)} < x\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_{N(t)} < x, N(t) = n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_n < x, N(t) = n\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - x < S_n < t, S_{n+1} \geq t\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^t P\{S_{n+1} \geq t \mid S_n = u\} dP\{S_n < u\} \quad [\text{由(1.6.4)}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^t P\{\xi_2 \geq t - u\} dP\{S_n < u\} \\
 &= \int_{t-x}^t [1 - F(t - u)] dm(u).
 \end{aligned}$$

从而

$$P\{\xi_-(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_{t-x}^t [1 - F(t - u)] dm(u), & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t. \end{cases} \quad (1.6.19)$$

类似地, 对于任意  $y > 0$  有

$$P\{\xi_+(t) < y\} = P\{S_{N(t)+1} < t + y\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_{n+1} < t + y, N(t) = n\}$$



$$\begin{aligned}
&= F_1(t+y) - F_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P\{t-u \leq \xi_{n+1} < t+y-u\} dP\{S_n < u\} \\
&= F_1(t+y) - F_1(t) + \int_0^t [F(t+y+u) - F(t-u)] dm(u), \\
&= m(t+y) - m(t) = \int_t^{t+y} F(t+y-u) dm(u) \\
&= \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u). \quad [\text{由(1.6.6)}]
\end{aligned}$$

从而

$$P\{\xi_+(t) < y\} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u), & y > 0. \end{cases} \quad (1.6.20)$$

特别当  $\xi_2 \sim \Gamma(1, \lambda)$  时, 则  $m(u) = \lambda u$ ,  $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $t > 0$ , 从而(1.6.19)与(1.6.20)分别变为

$$P\{\xi_-(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t, \end{cases}$$

与

$$P\{\xi_+(t) < y\} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0. \end{cases}$$

此即定理 1.3.3.

现讨论  $(\xi_-(t), \xi_+(t))$  的联合概率分布. 因为当  $0 < x \leq t$ , 且  $y > 0$  时.

$$\begin{aligned}
P\{\xi_-(t) < x, \xi_+(t) < y\} &= P\{t - S_{N(t)} < x, S_{N(t)+1} - t < y\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_{N(t)} < x, S_{N(t)+1} - t < y, N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - x < S_n < t, t \leq S_{n+1} < t + y\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^t P\{t-u \leq \xi_{n+1} < t+y-u\} dP\{S_n < u\} \\
&= \int_{t-x}^t [F(t+y-u) - F(t-u)] dm(u). \quad (1.6.21)
\end{aligned}$$

当  $0 < t < x, y > 0$  时

$$\begin{aligned} P\{\xi_-(t) < x, \xi_+(t) < y\} &= P\{\xi_+(t) < y\} \\ &= \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u). \end{aligned}$$

从而得  $(\xi_-(t), \xi_+(t))$  的联合分布函数

$$P\{\xi_-(t) < x, \xi_+(t) < y\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0, \\ \int_{t-x}^t [F(t+y-u) - F(t-u)] dm(u), & 0 < x \leq t, y > 0, \\ \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u), & 0 < t < x, y > 0. \end{cases}$$

由图 1-4 知

$$\{\xi_-(t) \geq x, \xi_+(t) \geq y\} = \{\xi_+(t-x) \geq x+y\}, \quad (1.6.22)$$

$$\{\xi_-(t) \geq x, \xi_+(t) \geq y\} = \{\xi_-(t+y) \geq x+y\}. \quad (1.6.23)$$

#### 1.6.4 年龄与剩余寿命的极限分布

设  $\xi_- = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_-(t)$ ,  $\xi_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_+(t)$ , 则由概率论中依概率为 1 收敛必依分布收敛, 有  $P\{\xi_- < x\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_-(t) < x\}$ ,  $P\{\xi_+ < y\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_+(t) < y\}$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ .

现求  $\xi_-$  的分布. 在定理 1.6.3 中, 定义

$$Q(t) = \begin{cases} 1 - F(t), & 0 < t \leq x, \\ 0, & t > x, \end{cases} \quad x > 0. \quad (1.6.24)$$

则  $Q(t)$  非负、不增, 且  $\int_0^\infty Q(t) dt = \int_0^x [1 - F(t)] dt < \infty$ .

由 (1.6.19) 与 (1.6.15) 得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [1 - F(t-u)] dm(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-u) dm(u) \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty Q(t) dt = \frac{1}{b} \int_0^x [1 - F(t)] dt, \end{aligned}$$

即

$$P\{\xi_- < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{b} \int_0^x [1 - F(t)] dt, & x > 0. \end{cases} \quad (1.6.25)$$

现求  $\xi_+$  的分布. 由 (1.6.20) 得

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u) \\ &= [1 - F(t+y-u)] m(u) \Big|_t^{t+y} + \int_t^{t+y} m(u) dF(t+y-u) \\ &= m(t+y) - m(t) + F(y)m(t) - \int_0^y m(t+y-\tau) dF(\tau) \\ &= [m(t+y) - m(t)][1 - F(y)] + \int_0^y [m(t+y) - m(t+y-\tau)] dF(\tau) \\ &\rightarrow \frac{y}{b} [1 - F(y)] + \int_0^y \frac{\tau}{b} dF(\tau) = \frac{1}{b} \int_0^y [1 - F(\tau)] d\tau, \quad (\text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}) \end{aligned}$$

从而  $\xi_+$  的分布函数为

$$P\{\xi_+ < y\} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{b} \int_0^y [1 - F(\tau)] d\tau, & y > 0. \end{cases} \quad (1.6.26)$$

由 (1.6.25) 与 (1.6.26) 知  $\xi_-$  与  $\xi_+$  同分布. 当  $\xi_2$  为连续型随机变量时,  $\xi_-, \xi_+$  也为连续型随机变量, 且  $\xi_-, \xi_+$  的密度函数分别为

$$f_-(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} [1 - F(x)], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, f_+(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} [1 - F(y)], & y > 0, \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (1.6.27)$$

且

$$E(\xi_-) = E(\xi_+) = \frac{1}{b} \int_0^\infty x [1 - F(x)] dx = \frac{E(\xi_2^2)}{2b} = \frac{E(\xi_2^2)}{2E(\xi_2)}, \quad (1.6.28)$$

类似地

$$E(\xi_-^k) = E(\xi_+^k) = E(\xi_2^{k+1}) / [(k+1)E(\xi_2)]. \quad (1.6.29)$$

记  $\xi_2^*(s), \xi_-^*(s), \xi_+^*(s)$  分别为  $\xi_2, \xi_-, \xi_+$  的 LST (拉普拉斯-司蒂阶变换). 则

$$\begin{aligned}
\xi_-^*(s) &= \xi_+^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} [1 - F(x)] \frac{1}{b} dx \\
&= - \int_0^\infty \frac{1}{sb} [1 - F(x)] d e^{-sx} \\
&= \frac{1 - \xi_2^*(s)}{bs} = \frac{1 - \xi_2^*(s)}{SE(\xi_2)}, \quad R_e(s) > 0,
\end{aligned} \tag{1.6.30}$$

现求  $(\xi_-, \xi_+)$  的联合分布. 因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [F(t+y-u) - F(t-u)] dm(u) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \int_{t-x}^t [1 - F(t-u)] dm(u) - \int_{t-x}^t [1 - F(t+y-u)] dm(u) \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [1 - F(t-u)] dm(u) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [1 - F(t+y-u)] dm(u).
\end{aligned}$$

类似于(1.6.25)的推导, 上式第一项为  $\frac{1}{b} \int_0^x [1 - F(t)] dt$ . 为求第二项, 令

$$Q_1(t) = \begin{cases} 1 - F(t), & y < t < x + y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则  $Q_1(x)$  非负、不增, 且  $\int_0^\infty Q_1(t) dt = \int_y^{x+y} [1 - F(t)] dt$ , 由(1.6.15)得

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [1 - F(t+y-u)] dm(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t Q_1(t+y-u) dm(u) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau-y} Q_1(\tau-u) dm(u) = \frac{1}{b} \int_0^\infty Q_1(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{b} \int_y^{x+y} [1 - F(\tau)] d\tau = \frac{1}{b} \int_0^{x+y} [1 - F(\tau)] d\tau - \frac{1}{b} \int_0^y [1 - F(\tau)] d\tau,
\end{aligned} \tag{1.6.31}$$

从而, 由(1.6.21),  $(\xi_-, \xi_+)$  的分布函数为

$$P\{\xi_- < x, \xi_+ < y\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0, \\ \frac{1}{b} \int_0^x [1 - F(\tau)] d\tau + \frac{1}{b} \int_0^y [1 - F(\tau)] d\tau \\ \quad - \frac{1}{b} \int_0^{x+y} [1 - F(\tau)] d\tau, & x > 0, y > 0. \end{cases} \tag{1.6.32}$$

当  $\xi_2$  为连续型随机变量且有密度函数  $f(t)$  时, 则  $(\xi_-, \xi_+)$  为二维连续型随机向量, 且由 (1.6.32) 其密度函数为

$$f_{-,+}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{b} f(x+y), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (1.6.33)$$

求  $(\xi_-, \xi_+)$  的分布函数的另一个方法: 因为对于  $x > 0, y > 0$  由 (1.6.22) 有

$$\{\xi_-(t) \geq x, \xi_+(t) \geq y\} = \{\xi_+(t-x) \geq x+y\},$$

$$\text{令 } t \rightarrow \infty, \text{ 得 } \{\xi_- \geq x, \xi_+ \geq y\} = \{\xi_+ \geq x+y\}. \quad (1.6.34)$$

从而

$$\begin{aligned} P\{\xi_- < x, \xi_+ < y\} &= 1 - P\{\xi_- \geq x\} - P\{\xi_+ \geq y\} + P\{\xi_- \geq x, \xi_+ \geq y\} \\ &= P\{\xi_- < x\} + P\{\xi_+ < y\} - P\{\xi_+ < x+y\}, \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

再由 (1.6.25), (1.6.26) 与 (1.6.35) 立得 (1.6.32). 由 (1.6.34) 得

$$\{\xi_- \geq x\} = \{\xi_- \geq x, \xi_+ \geq 0\} = \{\xi_+ \geq x\}. \quad (1.6.36)$$

从而知  $\xi_-$  与  $\xi_+$  同分布. 由 (1.6.33),  $(\xi_-, \xi_+)$  的 LST 为

$$\begin{aligned} E(e^{-s_1 \xi_- - s_2 \xi_+}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x - s_2 y} \frac{f(x+y)}{b} dx dy \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-s_1 x} \left[ \int_x^\infty e^{-s_2(u-x)} f(u) du \right] dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-s_2 u} f(u) \left[ \int_0^u e^{-s_1 x + s_2 x} dx \right] du \\ &= \frac{1}{b(s_1 - s_2)} \int_0^\infty [1 - e^{-s_1 u + s_2 u}] e^{-s_2 u} f(u) du \\ &= \frac{\xi_2^*(s_2) - \xi_2^*(s_1)}{b(s_1 - s_2)}, \end{aligned} \quad (1.6.37)$$

令  $s_2 = 0, s_1 = s$ , 得  $\xi_-^*(s) = \frac{1 - \xi_2^*(s)}{bs}$ , 此即 (1.6.30) 式. 令

$\eta = \xi_+ + \xi_-$ , 则  $\eta$  的密度函数为

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^\infty f_{-,+}(x, t-x) dx = \begin{cases} tf(t)/b, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.6.38)$$

且

$$E(\eta) = \frac{E(\xi_2^2)}{b} = \frac{E(\xi_2^2)}{E(\xi_2)}. \quad (1.6.39)$$

由(1.6.38)知,  $\eta$  与  $\xi_2$  的分布不同.

当  $\xi_2 \sim \Gamma(1, \lambda)$  时, 由(1.6.27)知,  $\xi_- \sim \Gamma(1, \lambda)$ ,  $\xi_+ \sim \Gamma(1, \lambda)$ . 而  $(\xi_-, \xi_+)$  的密度函数为

$$f_{-,+}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x > 0, y > 0. \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (1.6.40)$$

从而,  $\xi_-$  还与  $\xi_+$  独立.

## 第二章 $M/M/\cdot$ 系统

### § 2.1 平衡状态的一些结果

#### 2.1.1 $M/M/n$ 系统

设  $M/M/n$  系统的输入过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松过程, 即到达间隔时间序列  $\{J_k, k \geq 0\}$  为 i.i.d 随机变量序列, 且  $J_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$ . 服务机构有  $n$  个 ( $n \geq 1$ ) 服务台, 每个服务台独立工作, 且具有相同分布的服务时间  $B, B \sim \Gamma(1, \mu)$ , 即顾客的服务时间序列  $\{B_k, k \geq 1\}$  为 i.i.d 随机变量序列, 且  $B_1 \sim \Gamma(1, \mu)$ . 并设  $\{B_k, k \geq 1\}$  与  $\{J_k, k \geq 1\}$  独立.

设  $X(t)$  表示时间  $t$  时系统中的顾客数 (包括正在服务的顾客数), 即  $\{X(t), t \geq 0\}$  为系统的状态过程. 设

$$\{t < X_k < t + \Delta t\}.$$

表示服务机构有  $k$  个服务台在时间间隔  $(t, t + \Delta t)$  中结束服务 ( $0 \leq k \leq n$ ). 因为一个服务台在时刻  $t$  正在服务, 经  $\Delta t$  时间后, 它没有结束服务的概率 (由定理 1.3.1) 为

$$\begin{aligned} P\{B > t + \Delta t | B > t\} &= P\{B > \Delta t\} = e^{-\mu\Delta t} \\ &= 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

从而它结束服务的概率为

$$P\{B \leq t + \Delta t | B > t\} = 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t). \quad (2.1.2)$$

又因  $\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\}$  与  $\{X(t) = i\}$  独立, 所以由 (1.3.9) 式有

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) &\equiv P\{X(t + \Delta t) = i + 1 | X(t) = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,n)} P\{t < X_k < t + \Delta t, N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= k + 1 | X(t) = i\} \\ &= P\{t < X_0 < t + \Delta t, N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | X(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\} + o(\Delta t) \\
&= P\{t < X_0 < t + \Delta t | X(t) = i\} P\{N(t + \Delta t) - N(t) \\
&= 1\} + o(\Delta t) \\
&= (e^{-\mu\Delta t})^{\min(i, n)} \lambda \Delta t e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t), i \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned}
p_{i, i-1}(\Delta t) &\equiv P\{X(t + \Delta t) = i - 1 | X(t) = i\} \\
&= \sum_{k=1}^{\min(i, n)} P\{t < X_k < t + \Delta t, N(t + \Delta t) - N(t) = k - 1 | X(t) = i\} \\
&= P\{t < X_1 < t + \Delta t, N(t + \Delta t) - N(t) = 0 | X(t) = i\} \\
&\quad + P\{t < X_2 < t + \Delta t, N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | X(t) = i\} + o(\Delta t) \\
&= C_{\min(i, n)}^1 (1 - e^{-\mu\Delta t}) (e^{-\mu\Delta t})^{\min(i, n) - 1} e^{-\lambda\Delta t} \\
&\quad + C_{\min(i, n)}^2 (1 - e^{-\mu\Delta t})^2 (e^{-\mu\Delta t})^{\min(i, n) - 2} \lambda \Delta t e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \min(i, n) \mu \Delta t + o(\Delta t) \\
&= \begin{cases} i\mu \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ n\mu \Delta t + o(\Delta t), & i = n, n + 1, \dots. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

同理

$$\begin{aligned}
p_{ij}(\Delta t) &\equiv P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} \\
&= o(\Delta t), |j - i| \geq 2,
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

所以

$$\begin{aligned}
p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{X(t + \Delta t) = i | X(t) = i\} \\
&= 1 - \lambda \Delta t - \mu_i \Delta t + o(\Delta t),
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

其中

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ n\mu, & i = n, n + 2, \dots. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

从而知  $\{X(t), t \geq 0\}$  是生灭过程, 且生率为

$$\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1.8}$$

灭率由(2.1.7)式给出.

由(1.5.25)与(1.5.26)两式知, 当  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$  时, 即



$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{n\mu} \right)^k < \infty,$$

也即

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \quad (2.1.9)$$

时,该生灭过程有平稳分布,且平稳分布为

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{(n\rho)^k \pi_0}{k!}, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{n^n \rho^k \pi_0}{n!}, & k = n, n+1, \dots, \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$\pi_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n! (1-\rho)} \right]^{-1}, \quad (2.1.11)$$

其中  $\pi_k$  表示系统处于平衡后系统中有  $k$  个顾客的概率. 由 (1.5.26) 与 (2.1.9) 式知. 该生灭过程存在平稳分布充要条件为  $\rho < 1$ . 称  $\rho$  为系统的服务强度.

由平稳分布可得  $M/M/n$  系统如下几个数量指标.

(1) 平均队长、平均等待队长

用  $X$  表示系统在  $\rho < 1$  下的队长, 用  $X_q$  表示系统的等待队长, 则由 (2.1.10) 与 (2.1.11) 式得

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k = \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k (n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k n^n \rho^k}{n!} \right] \pi_0 \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n [\rho + n(1-\rho)]}{n! (1-\rho)^2} \right\} \pi_0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

由 (2.1.10) 与 (2.1.11) 式得  $X_q$  的分布律:

$$\begin{cases} P\{X_q = k\} = \pi_{n+k} = \frac{n^n \rho^{n+k}}{n!} \pi_0, & k = 1, 2, 3, \dots \\ P\{X_q = 0\} = \sum_{j=0}^n \pi_j = \sum_{j=0}^n \frac{(n\rho)^j}{j!} \pi_0, \end{cases} \quad (2.1.13)$$

$\pi_0$  由 (2.1.11) 式确定. 从而得

$$E(X_q) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(n\rho)^n \rho^k}{n!} \pi_0 = \frac{(n\rho)^n \rho}{n! (1-\rho)^2} \pi_0 = \frac{\rho \pi_n}{(1-\rho)^2}. \quad (2.1.14)$$

(2) 平均占用服务台数  $K$  为

$$\begin{aligned}
 K &= E(X) - E(X_q) = \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n [\rho + n(1-\rho)]}{n!(1-\rho)^2} \right] \\
 &\quad \cdot \pi_0 - \frac{(n\rho)^n \rho \pi_0}{n!(1-\rho)^2} \\
 &= \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n}{(n-1)!(1-\rho)} \right] \pi_0 \\
 &= n\rho \pi_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{n\rho (n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \pi_0 = n\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.1.15)
 \end{aligned}$$

所以

$$E(X) = E(X_q) + K = \frac{(n\rho)^n \rho \pi_0}{n!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho \pi_n}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.1.16)$$

(3) 顾客到达服务机构需要等待的概率  $p$  为

$$p = P\{X \geq n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^n \rho^k}{n!} \pi_0 = \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \pi_0 = \frac{\pi_n}{1-\rho}. \quad (2.1.17)$$

因此顾客到达不需要等待的概率为

$$1 - p = 1 - \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \pi_0 = \frac{1 - \rho - \pi_n}{1 - \rho}. \quad (2.1.18)$$

(4) 等待时间的分布

设  $W$  为在系统平稳条件  $\rho < 1$  下一个顾客的等待时间, 则

$$P\{W=0\} = p\{X < n\} = 1 - \frac{\pi_n}{1-\rho}. \quad (2.1.19)$$

对  $\forall$  实数  $t > 0$ ,  $W$  的分布函数为

$$F_W(t) = P\{W < t\} = P\{W=0\} + P\{0 < W < t\}.$$

$$\text{又因 } P\{0 < W < t\} = \sum_{k=n}^{\infty} P\{0 < W < t | X = k\} P\{X = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{0 < W < t | X = k\} \pi_k$$

(由定理 1.1.4 与定理 1.1.5)

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \pi_k \int_0^t \frac{(n\mu)^{k-n+1} x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} e^{-n\mu x} dx \quad (\text{因 } \pi_k = \pi_n \rho^{k-n})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \pi_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(n\mu x\rho)^{k-n}}{(k-n)!} n\mu e^{-n\mu x} dx \\
&= n\mu\pi_n \int_0^t e^{-n\mu(1-\rho)x} dx \\
&= \frac{\pi_n}{1-\rho} [1 - e^{-n\mu(1-\rho)t}],
\end{aligned}$$

故

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \frac{\pi_n}{1-\rho} e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.20)$$

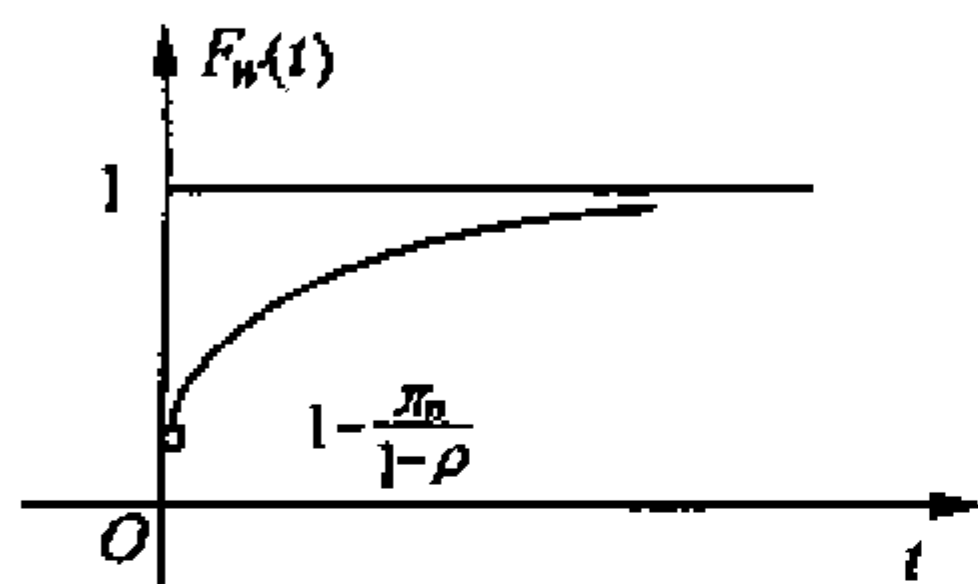


图 2-1

$F_W(t)$  的图形如图 2-1 所示. 易见, 在  $t=0$  处  $F_W(t)$  不连续, 所以  $W$  不是连续型随机变量. 因为  $F_W(t)$  的图形不是梯形的, 故  $W$  也不是离散型随机变量. 由 (2.1.20) 式,  $W$  的密度函数为

$$f_W(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(1 - \frac{\pi_n}{1-\rho}\right) \delta(t) + n\mu\pi_n e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1.21)$$

其中  $\delta(t)$  为 Dirac 函数, 简称为  $\delta$  函数. 它有如下性质:

- (i) 当  $t \neq 0$  时,  $\delta(t) = 0$ ; 当  $t = 0$  时  $\delta(t) = \infty$ .
- (ii)  $\delta(-t) = \delta(t)$ .

- (iii) 对任意连续函数  $\varphi(t)$  有  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$ .

$\delta(t)$  可以看成单位跳跃函数

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.1.22)$$

的导数, 即

$$\delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}. \quad (2.1.23)$$

由 (2.1.20) 或 (2.1.21) 式可得  $W$  的数学期望:

$$E(W) = \int_{0-}^{\infty} t f_W(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0-}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi_n}{1-\rho}\right) \delta(t) t dt + \int_{0-}^{\infty} n\mu \pi_n t e^{-n\mu(1-\rho)t} dt \\
&= \frac{\pi_n}{n\mu(1-\rho)^2} = \frac{\rho\pi_n}{\lambda(1-\rho)^2} = \frac{E(X_q)}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

因为

$$\begin{aligned}
E(W^2) &= \frac{\pi_n}{1-\rho} \int_0^{\infty} t^2 n\mu(1-\rho) e^{-n\mu(1-\rho)t} dt \\
&= \frac{2\pi_n}{(n\mu)^2(1-\rho)^3},
\end{aligned}$$

所以

$$D(W) = \frac{\pi_n [2(1-\rho) - \pi_n] \rho^2}{\lambda^2(1-\rho)^4}. \tag{2.1.25}$$

### (5) 逗留时间的分布

在系统平稳条件下, 设  $T$  为任一顾客在系统中的逗留时间, 由于顾客的服务时间  $B$  与  $W$  独立, 则有

$$T = W + B. \tag{2.1.26}$$

所以

$$E(T) = E(W) + E(B) = \frac{\rho\pi_n}{\lambda(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{E(X)}{\lambda}, \tag{2.1.27}$$

$$D(T) = D(W) + D(B) = \frac{\pi_n [2(1-\rho) - \pi_n] \rho^2}{\lambda^2(1-\rho)^4} + \frac{1}{\mu^2}, \tag{2.1.28}$$

因为当  $t > 0$  时,

$$P\{T < t\} = P\{W + B < t\}$$

$$= \int_0^t P\{W + B < t \mid B = x\} \mu e^{-\mu x} dx$$

$$= \int_0^t P\{W < t - x\} \mu e^{-\mu x} dx \quad (\text{由(2.1.20)式})$$

$$= \int_0^t \left[1 - \frac{\pi_n}{1-\rho} e^{-(n\mu-\lambda)(t-x)}\right] \mu e^{-\mu x} dx$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu t \pi_n}{1-\rho} e^{-(n\mu-\lambda)t}, & n\mu = \lambda + \mu \\ 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu \pi_n}{(1-\rho)(n\mu-\lambda-\mu)} [e^{-\mu t} - e^{-(n\mu-\lambda)t}], & n\mu \neq \lambda + \mu, \end{cases}$$

故  $T$  的分布函数为

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu t} - n\mu t \pi_n e^{-\mu t}, & n\mu = \lambda + \mu, \quad t > 0, \\ 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu \pi_n}{(1-\rho)(n\mu - \lambda - \mu)} \\ \times [e^{-\mu t} - e^{-(n\mu - \lambda)t}], & n\mu \neq \lambda + \mu, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.1.29)$$

显然  $T$  是连续型随机变量,  $T$  的密度函数为

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (n\mu^2 t \pi_n + \mu - n\mu \pi_n) e^{-\mu t}, & n\mu = \lambda + \mu, \quad t > 0, \\ \left[ \mu + \frac{\mu^2 \pi_n}{(1-\rho)(n\mu - \lambda - \mu)} \right] e^{-\mu t} - \frac{n\mu^2 \pi_n}{n\mu - \lambda - \mu} \\ \times e^{-(n\mu - \lambda)t}, & n\mu \neq \lambda + \mu, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.1.30)$$

### 2.1.2 $M/M/1$ 系统

对于先到先服务等待制系统  $M/M/n$ , 当  $n=1$  时, 可得相应的系统  $M/M/1$  的诸指标值.

由(2.1.10)与(2.1.11)式, 得队长  $X$  的分布律:

$$\begin{cases} \pi_k = \pi_0 \rho^k, & k = 1, 2, 3, \dots, \\ \pi_0 = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k + 1 \right]^{-1} = 1 - \rho, \quad \rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} < 1, \end{cases}$$

即

$$\pi_k = (1 - \rho) \rho^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.31)$$

故

$$E(X) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad (2.1.32)$$

$$D(X) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \quad (2.1.33)$$

等待队长  $X_q$  的分布为

$$\begin{cases} P\{X_q = 0\} = \pi_0 + \pi_1 = 1 - \rho^2, \\ P\{X_q = k\} = \pi_{k+1} = (1 - \rho) \rho^{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.1.34)$$

从而

$$E(X_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho}, D(X_q) = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}. \quad (2.1.35)$$

平均占用服务台数  $K$  为

$$K = \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.1.36)$$

顾客到达不需要等待的概率为

$$\pi_0 = 1 - \rho. \quad (2.1.37)$$

等待时间  $W$  的分布函数为

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.38)$$

等待时间  $W$  的密度函数为

$$f_w(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (1-\rho)\delta(t) + \mu\rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.39)$$

平均等待时间为

$$E(W) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{E(X_q)}{\lambda}. \quad (2.1.40)$$

平均等待时间方差为

$$D(W) = \frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}. \quad (2.1.41)$$

逗留时间  $T$  的密度函数为

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (\mu - \lambda)e^{-(\mu - \lambda)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.42)$$

从而知

$$T \sim \Gamma(1, \mu - \lambda), E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}, D(T) = \frac{1}{(\mu - \lambda)^2}. \quad (2.1.43)$$

**例 2.1.1** 对于系统  $M/M/1$ , 设生率  $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}, i = 0, 1, 2, 3, \dots, \lambda > 0$ , 灭率为  $\mu_0 = 0, \mu_i = \mu, i = 1, 2, 3, \dots, \mu > 0$ , 即每个顾客的服务时间  $B \sim \Gamma(1, \mu)$ , 顾客到达间隔时间服从参数为  $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}$  的指数分布, 这里  $i$  是系统的状态. 或者可以这样理解: 到达

时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布. 但每个到达顾客以概率  $\frac{1}{i+1}$  进入系统, 而  $i$  是到达时系统中顾客数. 易见, 当系统中的顾客数  $i$  越大, 进入的概率就越小. 对于这样的排队系统, 现来讨论队长的分布律和其它数量指标.

由(1.5.25)与(1.5.26)式知, 队长  $X$  的分布律为

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \pi_0 = \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0, \quad k \geq 1,$$

$$\pi_0 = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1} = e^{-\rho}, \quad \rho \equiv \frac{\lambda}{\mu}.$$

故

$$\pi_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \quad \text{即 } X \sim P(\rho). \quad (2.1.44)$$

从而

$$E(X) = D(X) = \rho.$$

注意: 这里  $\rho$  不是服务强度. 为求服务强度, 先来求平均进入率

$\bar{\lambda}, \bar{\lambda}$  等于  $\frac{\lambda}{k+1}$  与到达时系统中有  $k$  个顾客的概率之积的和, 即

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{k+1} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{k+1} e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} = \mu(1 - e^{-\rho}). \quad (2.1.45)$$

所以系统的服务强度为

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = 1 - e^{-\rho}, \quad (2.1.46)$$

到达的顾客进入系统的概率为

$P\{\text{到达顾客进入系统}\}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\text{到达顾客进入系统} \mid X = k\} p\{X = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} = (1 - e^{-\rho})/\rho. \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

由(2.1.44)式, 排队长  $X_q$  的分布律为

$$\begin{cases} P\{X_q = 0\} = \pi_0 + \pi_1 = e^{-\rho}(1 + \rho), \\ P\{X_q = k\} = \pi_{k+1} = e^{-\rho} \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \quad (2.1.48)$$

故

$$E(X_q) = e^{-\rho} + \rho - 1. \quad (2.1.49)$$

现来讨论进入系统的顾客等待时间  $W$  的分布. 对任意实数  $t > 0$ , 因为

$$F_w(t) = P\{W < t\} = P\{W = 0\} + P\{0 < W < t\},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } P\{W = 0\} &= P\{X = 0 | \text{顾客进入系统}\} \\ &= P\{X = 0, \text{顾客进入系统}\} / P\{\text{顾客进入系统}\} \\ &= P\{\text{顾客进入系统} | X = 0\} P\{X = 0\} / P\{\text{顾客进入系统}\} \\ &= \frac{1}{0+1} \pi_0 / \left[ \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho}) \right] = \frac{\rho e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}}, \quad (2.1.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{0 < W < t\} &= P\{0 < W < t | \text{顾客进入系统}\} \\ &= P\{0 < W < t, \text{顾客进入系统}\} / P\{\text{顾客进入系统}\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{0 < W < t | X = k \Delta \text{顾客进入系统}\} \\ &\quad \cdot P\{x = k | \text{顾客进入系统}\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} dx \cdot \frac{\pi_k}{k+1} \cdot \frac{\rho}{1 - e^{-\rho}}, \end{aligned}$$

所以  $W$  的分布函数为

$$F_w(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{\rho e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} + \frac{\rho e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k+1)!} \int_0^t \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} dx, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.51)$$

故  $W$  的密度函数为

$$f_w(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{\rho e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \delta(t) + \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}, & t > 0 \end{cases} \quad (2.1.52)$$

$W$  的数学期望为



$$\begin{aligned}
 E(W) &= \int_0^{\infty} t f_w(t) dt = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k}{\mu} \\
 &= \frac{e^{-\rho}}{(1 - e^{-\rho})\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\rho^{k+1}}{k!} - \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \right] = \frac{e^{-\rho} + \rho - 1}{\mu(1 - e^{-\rho})} = \frac{E(X_q)}{\lambda}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.53}$$

### 2.1.3 M/M/n/n 系统

对于系统 M/M/n/n 来说, 如果顾客到达服务机构时有服务台闲着, 他就立刻进入服务, 否则, 他将离开, 永不再来. 其它假设与 2.1.1 节相同.

类似于 2.1.1 节的证明, 系统 M/M/n/n 的状态过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  也是生灭过程, 其状态空间为  $I_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , 其生、灭率分别为

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda, & i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \mu_i = i\mu, & i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases}
 \tag{2.1.54}$$

由(1.5.25)与(1.5.26)式知, 队长  $X$  的分布律为

$$\begin{aligned}
 \pi_k &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
 \pi_0 &= \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right]^{-1},
 \end{aligned}$$

即

$$\pi_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k / \left[ \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \tag{2.1.55}$$

所以平均队长为

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \pi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+1} / \left[ \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right]. \tag{2.1.56}$$

系统的损失律为

$$\pi_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n / \left[ \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right]. \tag{2.1.57}$$

#### 2.1.4 $M/M/\infty$ 系统

现在的  $M/M/\infty$  系统有无穷多个服务台, 用类似于 2.1.1 节的方法可以证明该系统的状态过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为生灭过程, 其生灭率分别为

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots, & \lambda > 0, \\ \mu_i = i\mu, i = 0, 1, 2, \dots, & \mu > 0, \end{cases} \quad (2.1.58)$$

该状态过程平稳分布存在. 由 (1.5.25) 与 (1.5.26) 式, 得系统队长  $X$  的分布律为

$$\pi_k = e^{-\lambda/\mu} \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{即 } X \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (2.1.59)$$

#### 2.1.5 利特尔 (Little) 公式

由 2.1.1 节到 2.1.3 节知,  $E(W)$  与  $E(X_q)$  有关系:

$$E(W) = E(X_q) / \bar{\lambda}. \quad (2.1.60)$$

$E(T)$  与  $E(X)$  有关系:

$$E(T) = E(X) / \bar{\lambda}, \quad (2.1.61)$$

其中  $\bar{\lambda}$  为系统的进入率,  $E(X_q)$  为平均排队长,  $E(X)$  为平均队长,  $E(W)$ ,  $E(T)$  分别为平均等待时间和平均逗留时间. 上述两个公式长期以来都是以经验公式被使用的, 一直到 1961 年 J. D. C. Little 才第一次给出系统的证明. 1974 年 S. Slidhan 给出了最一般的证明. 现在我们介绍上两个公式的证明.

设  $\alpha(t)$  为在  $(0, t]$  时间区间中进入系统的顾客数, 则在这段时间中的进入率为

$$\bar{\lambda}_t = \frac{E[\alpha(t)]}{t}. \quad (2.1.62)$$

设  $\gamma(t)$  为  $\alpha(t)$  个顾客到时刻  $t$  为止花在系统中的总时间, 因此在这段时间里每个顾客的平均逗留时间为

$$\bar{T}_t = \frac{E[\gamma(t)]}{E[\alpha(t)]}. \quad (2.1.63)$$

故在这段时间里单位时间中系统中的平均顾客数为

$$\overline{X}_t = \frac{E[\gamma(t)]}{t}. \quad (2.1.64)$$

从而

$$\overline{X}_t = \frac{E[\gamma(t)]}{E[\alpha(t)]} \cdot \frac{E[\alpha(t)]}{t}. \quad (2.1.65)$$

记

$\bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lambda}_t$ ,  $E(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{T}_t$ ,  $E(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{X}_t$ . 则在平衡条件下, 这些极限存在, 从而得  $E(X) = \bar{\lambda}E(T)$ , 即  $E(T) = E(X)/\bar{\lambda}$ .

设  $\gamma^*(t)$  为在  $(0, t]$  中进入系统的  $\alpha(t)$  个顾客到时刻  $t$  为止等待时间之和. 则每个顾客平均等待时间为

$$\overline{W}_t = \frac{E[\gamma^*(t)]}{E[\alpha(t)]}. \quad (2.1.66)$$

从而在  $(0, t]$  中单位时间内系统中等待的顾客平均数为

$$\overline{X}_{qt} = \frac{E[\gamma^*(t)]}{t} = \frac{E[\gamma^*(t)]}{E[\alpha(t)]} \cdot \frac{E[\alpha(t)]}{t}.$$

故当  $\bar{\lambda} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lambda}_t$ ,  $E(W) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{W}_t$  存在时, 则  $E(X_q) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{X}_{qt}$  存在, 从而得  $E(X_q) = \bar{\lambda}E(W)$ , 即  $E(W) = E(X_q)/\bar{\lambda}$ . 上述两公式的推导与到达间隔时间、服务时间、以及排队规则无关.

### 2.1.6 $M/M/n/N$ 系统 ( $n \leq N$ )

现在的系统  $M/M/n/N$  为混合制系统. 若顾客到达时服务台空闲, 到达的顾客立刻进入服务. 若顾客到达时  $n$  个服务台不空闲且系统中的顾客数小于  $N$ , 则他排到队末等待服务, 否则他立即离开, 永不再来. 显然, 当  $N = n$  时, 它就是 2.1.3 节中的损失制系统, 当  $N = \infty$  时, 它就是 2.2.1 节中的系统  $M/M/n$ , 当  $N = n = \infty$  时, 它就是 2.1.4 节中的系统  $M/M/\infty$ .

类似 2.1.1 节中的推导, 系统  $M/M/n/N$  的状态过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为生灭过程, 其状态空间为  $I_n = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , 其生、灭率分别为

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda, & i = 0, 1, \dots, N-1, \lambda > 0, \\ \mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ n\mu, & i = n, n+1, \dots, N, \end{cases} & \mu > 0. \end{cases} \quad (2.1.67)$$

记  $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$ , 由 (1.5.25) 与 (1.5.26) 知, 队长  $X$  的分布 (系统状态的平稳分布) 为

$$\begin{cases} \pi_k = \begin{cases} \frac{(n\rho)^k \pi_0}{k!}, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{(n\rho)^k \pi_0}{n! n^{k-n}}, & k = n, n+1, \dots, N, \end{cases} \\ \pi_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^N \frac{(n\rho)^k}{n! n^{k-n}} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (2.1.68)$$

从而, 平均队长为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^N k\pi_k = \frac{\lambda}{\mu} (1 - \pi_n) \\ &+ \frac{\rho (n\rho)^n \pi_0}{n! (1-\rho)^2} [1 - (N-n+1)\rho^{N-n} + (N-n)\rho^{N-n+1}]. \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

排队长的分布为

$$\begin{aligned} P\{X_q = k\} &= \pi_{n+k} = \frac{(n\rho)^{n+k}}{n! n^k} \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, N-n, \\ P\{X_q = 0\} &= \sum_{k=0}^n \pi_k = \sum_{k=0}^n \frac{(n\rho)^k}{k!} \pi_0. \end{aligned} \quad (2.1.70)$$

平均排队长为

$$\begin{aligned} E(X_q) &= \sum_{k=0}^{N-n} k \frac{(n\rho)^{n+k}}{n! n^k} \pi_0 = \frac{\rho \pi_0 (n\rho)^n}{n!} \sum_{k=1}^{N-n} k \rho^{k-1} \\ &= \frac{\rho \pi_0 (n\rho)^n}{n! (1-\rho)^2} [1 - (N-n+1)\rho^{N-n} + (N-n)\rho^{N-n+1}]. \end{aligned} \quad (2.1.71)$$

损失率为

$$\pi_N = \frac{(n\rho)^N \pi_0}{n! n^{N-n}} = \frac{n^n \rho^N}{n!} \pi_0. \quad (2.1.72)$$

进入率(单位时间进入服务机构的顾客数)为

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - \pi_N). \quad (2.1.73)$$

平均占用服务台数为

$$K = E(X) - E(X_q) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - \pi_N) = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}. \quad (2.1.74)$$

由利特尔公式平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X_q)/\bar{\lambda} \\ &= \frac{\rho(n\rho)^n\pi_0}{n!(1-\rho)^2\lambda(1-\pi_N)} \\ &\quad \cdot [1 - (N-n+1)\rho^{N-n} + (N-n)\rho^{N-n+1}], \end{aligned} \quad (2.1.75)$$

$$E(T) = E(X)/\bar{\lambda} = \frac{1}{\mu} + E(W). \quad (2.1.76)$$

现来求进入系统的顾客的等待时间  $W$  的分布. 当  $t > 0$  时, 因为

$$F_w(t) = P\{W < t\} = P\{W = 0\} + P\{0 < W < t\},$$

又因

$$\begin{aligned} P\{W = 0\} &= \sum_{k=0}^{n-1} P\{X = k \mid \text{顾客进入系统}\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P\{\text{顾客进入系统} \mid X = k\} \pi_k / P\{\text{顾客进入系统}\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k / (1 - \pi_N), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{0 < W < t\} &= \sum_{k=n}^{N-1} P\{0 < W < t \mid X = k, \text{顾客进入系统}\} \\ &\quad \cdot P\{X = k \mid \text{顾客进入系统}\} \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \int_0^t e^{-n\mu x} \frac{(n\mu)^{k-n+1} x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} dx \cdot \frac{\pi_k}{1 - \pi_N}, \end{aligned}$$

所以, 等待时间  $W$  的分布函数为

$$F_w(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi_k}{1 - \pi_N} + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\pi_k}{1 - \pi_N} \int_0^t \frac{(n\mu)^{k-n+1} x^{k-n}}{(k-n)!} e^{-n\mu x} dx, & t > 0, \end{cases} \quad (2.1.77)$$

从而  $W$  的密度函数为

$$f_w(t) = \begin{cases} \delta(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi_k}{1 - \pi_N} + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\pi_k}{1 - \pi_N} \frac{(n\mu)^k}{(k-n)!} t^{k-n} \\ \quad \cdot e^{-n\mu t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (2.1.78)$$

### 2.1.7 $M/M/n/m/m$ 系统 ( $n \leq m$ )

$M/M/n/m/m$  系统又叫做  $n$  个维修工人看管  $m$  台机器问题. 设有  $m$  台机器,  $n$  个工人, 机器损坏后如果有工人空闲着, 空闲着的工人中立即有一个来维修, 否则损坏的机器依次排队等待维修. 每台机器正常工作时间  $J \sim \Gamma(1, \lambda)$ . 每台损坏的机器维修时间  $B \sim \Gamma(1, \mu)$ , 而且各机器在任意时间间隔内工作与维修都是相互独立的. 以  $X(t)$  表示时刻  $t$  时不在工作的机器数, 显然  $0 \leq X(t) \leq m$ . 因为

$$\begin{aligned} p_{k,k+1}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = k+1 | X(t) = k\} \\ &= C_{m-k}^1 P\{J \leq \Delta t | [P\{J > \Delta t\}]^{m-k-1} \\ &\quad \cdot [P\{B > \Delta t\}]^{\min(k,n)} + o(\Delta t)\} \\ &= C_{m-k}^1 (1 - e^{-\lambda\Delta t}) (e^{-\lambda\Delta t})^{m-k-1} (e^{-\mu\Delta t})^{\min(k,n)} \\ &\quad + o(\Delta t) \\ &= (m-k)\lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad k=0,1,\dots,m, \end{aligned} \quad (2.1.79)$$

$$\begin{aligned} p_{k,k-1}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = k-1 | X(t) = k\} \\ &= [P\{J > \Delta t\}]^{m-k} C_{\min(n,k)}^1 P\{B \leq \Delta t\} \\ &\quad \cdot [P\{B > \Delta t\}]^{\min(k,n)-1} + o(\Delta t) \\ &= \min(k,n)\mu\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (2.1.80)$$

又因

$$p_{kj}(\Delta t) \equiv P\{X(t+\Delta t) = j | X(t) = k\} = o(\Delta t), \quad |j-k| \geq 2,$$

所以

$$\begin{aligned} p_{kk}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = k | X(t) = k\} \\ &= 1 - (m-k)\lambda\Delta t - \mu_k\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

其中

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & k=0,1,2,\cdots,n-1, \\ n\mu, & k=n,n+1,\cdots,m. \end{cases} \quad (2.1.81)$$

从而知  $\{X(t), t \geq 0\}$  为生灭过程, 其生灭率分别为

$$\begin{cases} \lambda_k = (m-k)\lambda, & k=0,1,\cdots,m, \\ \mu_k = \begin{cases} k\mu, & k=0,1,\cdots,n-1, \\ n\mu, & k=n,n+1,\cdots,m. \end{cases} \end{cases} \quad (2.1.82)$$

由(1.5.25)与(1.5.26)式知, 系统中有  $X$  台机器不在工作的分布律为

$$\begin{cases} \pi_k = \begin{cases} C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0, & k=0,1,\cdots,n-1 \\ C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k!}{n! n^{k-n}} \pi_0, & k=n,\cdots,m, \end{cases} \\ \pi_0 = \left[ \sum_{k=0}^n C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=n+1}^m C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k!}{n! n^{k-n}} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (2.1.83)$$

平均不在工作的机器数由上式直接计算得不到简洁的表达式. 现设  $a, b, E(X_q)$  分别表示工作着的、维修着的与排队等待着的平均机器数, 则有

$$a + b + E(X_q) = m. \quad (2.1.84)$$

又每台机器平均工作时间为  $\frac{1}{\lambda}$ , 平均修理时间为  $\frac{1}{\mu}$ , 它们之比应等于  $a$  与  $b$  之比, 即

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (2.1.85)$$

又平均修理着的机器数  $b$  应等于平均工作着的维修工人数

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\pi_k + n \sum_{k=n}^m \pi_k, \text{ 即}$$

$$b = \sum_{k=0}^{n-1} k\pi_k + n \sum_{k=n}^m \pi_k = n \sum_{k=0}^m \pi_k - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\pi_k = n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\pi_k. \quad (2.1.86)$$

由上三式得

$$\begin{aligned} E(X_q) &= m - a - b = m - b \left( 1 + \frac{u}{\lambda} \right) \\ &= m - \frac{\lambda + u}{\lambda} \left[ n - \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \pi_k \right], \end{aligned} \quad (2.1.87)$$

$$E(X) = b + E(X_q) = m - \frac{u}{\lambda} \left[ n - \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \pi_k \right], \quad (2.1.88)$$

$$a = \frac{\mu}{\lambda} b = \frac{u}{\lambda} \left[ n - \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \pi_k \right]. \quad (2.1.89)$$

修理工人的损失系数(损失率)为

$$\frac{n - b}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \pi_k. \quad (2.1.90)$$

类似地可求出修理工人的工作效率  $\frac{b}{n}$ , 机器利用率  $\frac{a}{m}$ , 以及机器的

损失系数  $\frac{b + E(X_q)}{m}$  等.

由于在时刻  $t$ , 过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  的生率为

$$\lambda_{X(t)} = [m - X(t)]\lambda,$$

所以

$$E[\lambda_{X(t)}] = \lambda [m - E[X(t)]] \rightarrow \lambda [m - E(X)], \text{ (当 } t \rightarrow \infty \text{ 时)}$$

故系统的进入率(单位时间平均损坏的机器数)为

$$\bar{\lambda} = \lambda [m - E(X)] = \lambda a. \quad (2.1.91)$$

单位时间平均修复的机器数(修复率)为

$$\bar{\mu} = \mu b. \quad (2.1.92)$$

因为在平衡条件下, 有  $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ , 所以有  $\frac{a}{b} = \frac{\mu}{\lambda}$ .

由利特尔公式得平均等待修理时间为

$$E(W) = E(X_q) / \bar{\lambda} = \frac{m}{\mu} \left[ n - \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \pi_k \right]^{-1} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu}. \quad (2.1.93)$$



## § 2.2 瞬时状态的一些结果

瞬时  $M/M/\cdot$  系统讨论起来非常复杂,而且结果很冗长、复杂,适用价值也不很大.现仅介绍比较简单的几类系统.

### 2.2.1 $M/M/\infty$ 系统

由 2.1.4 节知,  $M/M/\infty$  系统的状态过程  $\{X(t) \geq 0\}$  是生灭过程,且生、灭率分别为

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ \mu_i &= i\mu, \quad i = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

由 (1.5.23) 式知,其前进柯氏方程为

$$\begin{cases} p'_j(t) = -(\lambda + j\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), & j \geq 1 \\ p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

设  $t=0$  时系统中有  $i$  个顾客,则方程 (2.2.1) 有初始条件

$$p_i(0) = 1, \quad p_j(0) = 0, \quad \text{当 } j \neq i \text{ 时}. \quad (2.2.2)$$

为解此柯氏方程,我们引进概率母函数 (PGF), 记

$$g(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) z^j, \quad |z| \leq 1. \quad (2.2.3)$$

称  $g(t, z)$  为概率分布  $\{p_j(t), j \geq 0\}$  的概率母函数,简记为 PGF. 于是由 (2.2.1) 式得

$$\frac{\partial g}{\partial t} - (1-z)\mu \frac{\partial g}{\partial z} = -\lambda(1-z)g, \quad (2.2.4)$$

其中  $g = g(t, z)$ . 因为  $p_i(0) = 1$ , 所以方程 (2.2.4) 的初始条件为

$$g(0, z) = z^i. \quad (2.2.5)$$

为解具有初始条件 (2.2.5) 的方程 (2.2.4), 我们考虑方程组:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dz}{(1-z)\mu} = -\frac{dg}{\lambda(1-z)g}, \quad (2.2.6)$$

于是由  $dt = -\frac{dz}{(1-z)\mu}$ , 得  $(1-z)e^{-\mu t} = C_1$ . 由  $-\frac{dz}{(1-z)\mu} =$

$-\frac{dg}{\lambda(1-z)g}$ , 得  $ge^{-\lambda z/\mu} = C_2$ . 所以

$$g(t, z)e^{-\lambda z/\mu} = \phi((1-z)e^{-\mu t}),$$

其中  $\phi$  为  $t, z$  的任意可微函数. 由初始条件, 得

$$z^i e^{-\lambda z/\mu} = \phi(1-z).$$

故

$$(1-x)^i e^{-\lambda(1-x)/\mu} = \phi(x),$$

从而

$$g(t, z)e^{-\lambda z/\mu} = [1 - (1-z)e^{-\mu t}]^i \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}[1 - (1-z)e^{-\mu t}]\right\}.$$

即

$$g(t, z) = [1 - (1-z)e^{-\mu t}]^i \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)(1-e^{-\mu t})\right\}, \quad (2.2.7)$$

因为  $[1 - (1-z)e^{-\mu t}]^i$  是随机变量  $\xi \sim B(i, e^{-\mu t})$  的 PGF, 而

$\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)(1-e^{-\mu t})\right\}$  是随机变量  $\eta \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)$  的

PGF, 所以  $g(t, z)$  是相互独立的两随机变量  $\xi$  与  $\eta$  之和的 PGF.

从而有

$$\begin{aligned} p_n(t) &= P\{X(t) = n\} = P\{\xi + \eta = n\} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i, n)} P\{\xi = k\} P\{\eta = n - k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i, n)} C_i^k e^{-k\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i-k} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right\} \\ &\quad \cdot \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right]^{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

特别, 当  $i=0$  时, 有

$$p_n(t) = P\{X(t) = n\} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \cdot \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^n}{n!}, \quad n \geq 0,$$

即

$$X(t) \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right). \quad (2.2.9)$$

所以

$$E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}). \quad (2.2.10)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $X \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ . 此与(2.1.59)式一致.

为介绍瞬时状态  $X(t)$  分布的另一个方法, 我们可以考虑更一般的  $M/G/\infty$  系统. 此系统与  $M/M/\infty$  系统的唯一区别是每个服务台的服务时间  $B$  服从一般分布. 设  $B$  的分布函数为  $H(t)$ ,

$\mu \equiv \frac{1}{E(B)}$ . 设

$$X(0) = 0, \quad \omega(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

则

$$X(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} \omega(t - \tau_k, B_k), \quad (2.2.12)$$

其中  $\tau_k$  为第  $k$  个顾客到达系统的时刻,  $B_k$  为第  $k$  个的服务时间, 与  $B$  同分布,  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 的泊松到达过程.

**引理 2.2.1** 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松到达过程,  $\{\tau_n, n \geq 1\}$  是  $\{N(t), t \geq 0\}$  的到达时刻序列, 则对  $\forall x \in (0, t)$ , 与整数  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) 有

$$P\{\tau_j < x | N(t) = n\} = \sum_{k=j}^n C_n^k \left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}.$$

**证**

$$\begin{aligned} P\{\tau_j < x | N(t) = n\} &= P\{\tau_j \leq x, N(t) = n\} / P\{N(t) = n\} \\ &= P\{N(x) \geq j, N(t) = n\} / P\{N(t) = n\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=j}^n P\{N(x) = k, N(t) = n\} / P\{N(t) = n\}$$

(由引理 1.3.1)

$$= \sum_{k=j}^n e^{-\lambda(t-x)} \frac{[\lambda(t-x)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} / \left[ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right]$$

$$= \sum_{k=j}^n C_n^k \left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}.$$

**引理 2.2.2** 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  为  $n$  个独立同分布随机变量,  $\xi_1 \sim U(0, t)$ ,  $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ , 为  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  的顺序统计量. 则第  $j$  个顺序统计量  $\xi_{(j)}$  对任意实数  $x \in (0, t]$ , 有

$$P\{\xi_{(j)} < x\} = \sum_{k=j}^n C_n^k \left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

**证** 因为  $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ , 所以

$$\begin{aligned} P\{\xi_{(j)} < x\} &= P\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \text{中至少有 } j \text{ 个小于 } x\} \\ &= \sum_{k=j}^n P\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \text{中恰有 } k \text{ 个小于 } x\} \\ &= \sum_{k=j}^n C_n^k [P\{\xi_1 < x\}]^k [P\{\xi_1 \geq x\}]^{n-k} \\ &= \sum_{k=j}^n C_n^k \left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

由上两个引理知, 在  $N(t) = n$  下, 在时间区间  $(0, t]$  中,  $n$  个顾客的到达时刻  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  的联合分布与引理 2.2.2 中的顺序统计量  $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$  的联合分布相同. 其密度函数都为

$$f_{\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2.2.13)$$

现在来讨论  $X(t)$  的分布. 由 (2.2.12) 式与上两个引理以及全数学期望公式,  $X(t)$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} G(t, z) &\equiv E[Z^{X(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[Z \sum_{k=0}^{N(t)} \omega(t - \tau_k, B_k) \mid N(t) = n\right] P\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[Z \sum_{k=0}^n \omega(t - \xi_k, B_k)\right] P\{N(t) = n\}. \quad (2.2.14) \end{aligned}$$

因为在  $N(t) = n$  下,  $\tau_k$  与  $\xi_{(k)}$  同分布, 而  $\xi_{(k)}$  总是  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  中某一个, 且求和变量  $k$  取遍  $0, 1, 2, \dots, n$ , 故可将  $\tau_k$  换为  $\xi_k$ , 又因  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  独立同分布, 所以  $\omega(t - \xi_1, B_1), \omega(t - \xi_2, B_2), \dots, \omega(t - \xi_n, B_n)$  独立同分布, 并且

$$E\left[Z \sum_{k=0}^n \omega(t - \xi_k, B_k)\right] = \sum_{m=0}^n Z^m P\left\{\sum_{k=0}^n \omega(t - \xi_k, B_k) = m\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^n Z^m C_n^m [P\{0 < t - \xi_k < B_k\}]^m [P\{0 < t - \xi_k \geq B_k\}]^{n-m} \\
&= [ZP\{0 < t - \xi_k < B_k\} + P\{t - \xi_k \geq B_k\}]^n, \quad (2.2.15)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
P\{0 < t - \xi_k < B_k\} &= \int_0^t P\{0 < t - \xi_k < B_k \mid \xi_k = x\} \frac{1}{t} dx \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t P\{0 < t - x < B_k\} dx = \frac{1}{t} \int_0^t [1 - H(t - x)] dx \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t [1 - H(x)] dx = 1 - \frac{1}{t} \int_0^t H(x) dx.
\end{aligned}$$

从而

$$P\{B_k \leq t - \xi_k\} = \frac{1}{t} \int_0^t H(x) dx.$$

故

$$E\left[Z \sum_{k=0}^n \omega(t - \xi_k, B_k)\right] = \left[Z - \frac{z}{t} \int_0^t H(x) dx + \frac{1}{t} \int_0^t H(x) dx\right]^n \quad (2.2.16)$$

将(2.2.16)式代入(2.2.14)式,得

$$\begin{aligned}
G(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[Z - \frac{z}{t} \int_0^t H(x) dx + \frac{1}{t} \int_0^t H(x) dx\right]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} \exp \left\{ \lambda t z - \lambda z \int_0^t H(x) dx + \lambda \int_0^t H(x) dx \right\} \\
&= \exp \left\{ -\lambda (1 - z) \int_0^t [1 - H(x)] dx \right\}. \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

此是参数为  $\lambda \int_0^t [1 - H(x)] dx$  的泊松分布随机变量的 PGF. 所以

$$X(t) \sim P\left(\lambda \int_0^t [1 - H(x)] dx\right). \quad (2.2.18)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\lambda \int_0^t [1 - H(x)] dx \rightarrow \lambda \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx = \lambda E(B) = \frac{\lambda}{\mu},$$

此示, 当  $M/G/\infty$  系统处于平衡状态后, 队长  $X$  的分布为  $X \sim$

$P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ . 当  $B \sim \Gamma(1, \mu)$  时,

因为  $\lambda \int_0^t [1 - H(x)] dx = \lambda \int_0^t e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$ , 所以  $M/M/\infty$  系统的瞬时队长  $X(t)$  的分布为  $X(t) \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})\right)$ .

### 2.2.2 $M/M/1$ 系统

由 2.1.2 节知,  $M/M/1$  系统的状态过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  的前进柯氏方程为

$$\begin{cases} p'_j(t) = -(\lambda + \mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t), j \geq 1, \\ p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \end{cases} \quad (2.2.19)$$

因为  $\{X(t), t \geq 0\}$  的生灭率分别为  $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots, \mu_i = \mu, i = 1, 2, 3, \dots, \mu_0 = 0$ . 假定  $t = 0$  时系统中有  $i$  个顾客, 即 (2.2.19) 有初始条件:

$$p_i(0) = 1, p_j(0) = 0, \text{ 当 } j \neq i \text{ 时}. \quad (2.2.20)$$

在初始条件 (2.2.20) 下, 微分差分方程 (2.2.19) 的解法复杂, 有兴趣的读者可参阅徐光辉的书, 这里只给出最后结果:

$$\begin{aligned} p_j(t) &\equiv P\{X(t) = j\} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{j-i}{2}} e^{-(\lambda+\mu)t} \{ I_{j-i}(2t \sqrt{\lambda\mu}) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot I_{j+i+1}(2t \sqrt{\lambda\mu}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \\ &\quad \cdot I_{j+i+k+1}(2t \sqrt{\lambda\mu}) \}, j \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

其中  $I_j(y), y \geq 0$ , 是纯虚数贝塞尔 (Bessel) 函数, 它由下列展开式定义:

$$e^{\frac{1}{2}y\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_j(y) Z^j. \quad (2.2.22)$$

由上可见, 此解既冗长又复杂, 对实际应用帮助不大. 关于其它系统, 其瞬时队长  $X(t)$  的分布更复杂. 在很多情况下用近似法得到的解更适合实际的需要.

## § 2.3 忙 期

现讨论  $M/M/\cdot$  系统的忙期. 先讨论  $M/M/\cdot$  系统的平均忙期, 然后讨论等待制  $M/M/n$  系统的  $k$  阶忙期, 最后讨论系统  $M/G/1$  的忙期的分布.

忙期是指: 从系统中开始有顾客时起一直到系统中又没有顾客时止这段时间, 一般用  $\theta$  表示忙期的长. 繁忙期记为  $A$ , 它是指: 从系统中所有服务台都进入服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间.  $k$  阶繁忙期是指: 从系统中开始有  $k$  个顾客在等待服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间, 并记为  $A_k (k \geq 0)$ . 显然, 当系统中只有一个服务台时, 繁忙期就是忙期. 当系统中有无穷多个服务台时, 繁忙期与  $k$  阶繁忙期均无定义. 又零阶繁忙期就是繁忙期.

### 2.3.1 $M/M/\cdot$ 系统的平均忙期

这里  $M/M/\cdot$  系统是指:

- 1) 系统中的服务台个数可以为任意正整数, 也可以为无穷.
- 2) 顾客到达间隔时间序列  $\{J_k, k \geq 0\}$  为相互独立随机变量序列, 每个  $J_k$  都服从指数分布, 其参数为系统状态的函数.
- 3) 所有服务台独立工作且任一服务台为任一顾客的服务时间相互独立同分布, 都服从参数为  $\mu$  的指数, 且与  $\{J_k, k \geq 1\}$  相互独立. 因此,  $M/M/\cdot$  系统包含了 § 2.1 中的各类系统.

设  $\{X(t), t \geq 0\}$  为系统的状态过程, 由定义 1.5.3 知, 该过程是生灭过程, 其生率为  $\lambda_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $\lambda_i > 0$ , 其灭率为  $\mu_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots)$ ,  $\mu_0 = 0$ , 其中  $i$  表示系统的状态. 即  $\lambda_i, \mu_i$  都是系统状态的函数. 当  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$  时, 状态过程的平稳分布存在, 且由 (1.5.25) 与 (1.5.26) 式给出.

**引理 2.3.1** 设  $\alpha_i$  表示系统自状态变为  $i$  时起一直到下一个

顾客到达时止这段时间,  $\beta_i$  表示系统的状态自变为  $i$  时起一直到下一个顾客离开时止这段时间. 则

(1)  $\alpha_i \sim \Gamma(1, \lambda_i)$ ,  $\beta_i \sim \Gamma(1, \mu_i)$  且  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  独立.

(2)  $\min(\alpha_i, \beta_i) \sim \Gamma(1, \lambda_i + \mu_i)$ .

证 (1) 由指数分布的无记忆性知,  $\alpha_i \sim \Gamma(1, \lambda_i)$ ,  $i \geq 0$ . 因为系统中每个服务台服务时间相互独立同分布, 均服从参数为  $\mu$  的指数分布, 设系统中有  $n$  ( $1 \leq n \leq \infty$ ) 个服务台, 其服务时间分别记为  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , 则  $B_j \sim \Gamma(1, \mu)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , 且有

$$\beta_i = \begin{cases} \min(B_1, B_2, \dots, B_n), & i \geq n, \\ \min(B_1, B_2, \dots, B_i), & i < n, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

由定理 1.1.5 知,  $\beta_i \sim \Gamma(1, \mu_i)$ , 其中

$$\mu_i = \begin{cases} n\mu, & i \geq n, \\ i\mu, & 0 \leq i < n. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

又由假设知  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  相互独立.

证 (2) 由 (1) 立证 (2).

引理 2.3.2 设  $W_j$  为  $M/M/\cdot$  系统的状态自转移到  $j$  时起一直到首次转移到状态 0 时止这段时间, 记  $\omega_j = E(W_j)$ ,  $j \geq 1$ . 则

当  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$  且  $\sup_{j \geq 0} \{\lambda_j\} < \infty$  时, 有

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i + \sum_{m=1}^{j-1} \left( \prod_{k=1}^m \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right) \sum_{i=m+1}^{\infty} \rho_i, \quad j \geq 1, \quad (2.3.3)$$

其中

$$\rho_1 = \frac{1}{\mu_1}, \rho_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}, \quad i \geq 2. \quad (2.3.4)$$

证 因为系统从转移到状态  $j$  时起, 经过时间  $\min(\alpha_j, \beta_j)$  后, 其状态依概率为 1 要发生变化, 或者  $j \rightarrow j+1$  或者  $j \rightarrow j-1$ . 又由全数学期望公式和指数分布的性质, 得

$$\begin{aligned} \omega_j &= E(W_j) \\ &= E[\min(\alpha_j, \beta_j)] + E[W_j | \alpha_j < \beta_j] P\{\alpha_j < \beta_j\} + E[W_j | \alpha_j > \beta_j] \\ &\quad \cdot P\{\alpha_j > \beta_j\} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{\lambda_j + \mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} \omega_{j+1} + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \omega_{j-1}, \quad j \geq 1,$$

即 
$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} (\omega_j - \omega_{j-1}), \quad j \geq 1 \quad (*)$$

因为  $\omega_0 = 0$ , 所以, 由上式递推得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{1}{\lambda_j \rho_j} \sum_{i=1}^j \rho_i + \frac{1}{\lambda_j \rho_j} \omega_1. \quad (2.3.5)$$

因为  $\omega_{j+1} - \omega_j > 0$ , 所以  $\omega_1 > \sum_{i=1}^j \rho_i$ . 当  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \infty$  时, 对任意正整数  $j$  有

$$\omega_j \geq \omega_1 = \infty. \text{ 当 } \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty \text{ 时, 记}$$

$$Z_n = \omega_{n+1} - \omega_n, \quad n \geq 0, \quad (2.3.6)$$

$$u_n = \frac{z_n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1, \quad u_0 = Z_0. \quad (2.3.7)$$

则由 (\*) 式有

$$Z_n = -\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n} Z_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad Z_0 = \omega_1.$$

从而

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} u_{n-1},$$

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = -\rho_n < 0, \quad n \geq 1. \quad (2.3.8)$$

故  $u_{n-1} > u_n, n \geq 1$ . 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  存在. 又因  $u_0 - u_n = \sum_{i=1}^n \rho_i$ , 从而

$$\omega_1 = u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i. \quad (2.3.9)$$

因为  $u_n = \lambda_n Z_n \rho_n, \sup_{n \geq 0} \{\lambda_n\} < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ . 又因系统状态都是正常返的, 从而对任意正整数  $n$ , 有  $0 < \omega_n < \infty$ . 又

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=0}^n Z_i, Z_i > 0, \text{故 } \sup_{n \geq 1} \{Z_n\} < \infty, \text{从而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n Z_n \rho_n = 0.$$

于是得

$$\omega_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i. \quad (2.3.10)$$

由(2.3.5) 式得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = \frac{1}{\lambda_j \rho_j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \rho_i = \prod_{k=1}^j \frac{\mu_k}{\lambda_k} \sum_{i=j+1}^{\infty} \rho_i.$$

故

$$\omega_j = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \sum_{i=j}^{\infty} \rho_i + \omega_{j-1},$$

递推立得(2.3.3)式.

**定理 2.3.1** 对于  $M/M/\cdot$  系统, 当  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty, \sup_{i \geq 0} \{\lambda_i\} < \infty$

时, 其平均忙期为

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\pi_0} - 1 \right), \quad (2.3.11)$$

其中  $\pi_0 = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \right]^{-1}$  为系统  $M/M/\cdot$  的平稳概率:  
 $P\{X=0\}$ .

**证** 因为  $E(\theta) = \omega_1$ , 所以由 (2.3.10) 式得

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{1}{\pi_0} - 1 \right]. \end{aligned}$$

**定理 2.3.2** 对具有  $n (n \geq 1)$  个服务台的等待制系统, 当

$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$  时, 其平均繁忙期为

$$E(A) = \frac{1}{\mu_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{n+i-1}}{\mu_n \mu_{n+1} \cdots \mu_{n+i}}, \quad 1 \leq n \leq \infty.$$

(2.3.12)

证 因为  $E(A) = \omega_n - \omega_{n-1}$ , 所以由 (2.3.3) 式立得 (2.3.12) 式.

**定理 2.3.3**  $M/M/\cdot$  系统的平均操作周期 (即系统自转移到状态 0 时起一直到下一次又转移到状态 0 时止这段时间的数学期望) 为

$$E(I + \theta) = \frac{1}{\lambda_0 \pi_0}, \quad (2.3.13)$$

其中  $I$  称为系统的闲期.

证 因为系统转移到状态 0 时, 经  $\alpha_0$  时间后必转移到状态 1, 由状态 1 经  $W_1$  时间后又回到状态 0, 所以  $I = \alpha_0$ . 从而

$$E(I + \theta) = E(\alpha_0 + W_1) = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\pi_0} - 1 \right) = \frac{1}{\lambda_0 \pi_0}.$$

例如

(1) 对于损失制  $M/M/n/n$  系统, 因为

$\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots, \mu_i = i\mu, i = 0, 1, \dots, n, \pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right]^{-1}$ , 所以

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j,$$

$$E(A) = \frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n\mu},$$

$$E(I + \theta) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j.$$

(2) 对于  $M/M/\infty$  系统, 因为  $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, 2, \dots, \mu_i = i\mu, i = 0, 1, 2, \dots, \pi_0 = e^{-\lambda/\mu}$ , 所以  $E(\theta) = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda/\mu} - 1), E(I + \theta) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda/\mu}$ .

(3) 对于等待制 (FCFS)  $M/M/n$  系统, 因为  $\lambda_i = \lambda, i \geq 0$ ,

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ n\mu, & i = n, n+1, \dots, \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n! (1-\rho)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1,$$

所以

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n! (1-\rho)} \right], \quad E(A) = \frac{1}{n\mu - \lambda},$$

$$E(I + \theta) = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{(n\rho)^n}{n! (1-\rho)} \right] \frac{1}{\lambda},$$

特别, 当  $n=1$  时  $E(\theta) = E(A) = \frac{1}{\mu - \lambda}, E(I + \theta) = \frac{\mu}{\lambda(\mu - \lambda)}$ .

(4) 对于混合制  $M/M/n/N (N \geq n)$  系统, 因为

$$\lambda_i = \lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ n\mu, & i = n, n+1, \dots, N, \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^N \frac{(n\rho)^j}{n! n^{j-n}} \right]^{-1},$$

所以

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^N \frac{(n\rho)^j}{n! n^{j-n}} \right]^{-1},$$

$$E(A) = (1 - \rho^{N+1-n}) / [n\mu(1-\rho)], \quad \rho = \frac{\lambda}{n\mu},$$

$$E(I + \theta) = \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n}^N \frac{(n\rho)^j}{n! n^{j-n}} \right].$$

(5) 对于  $M/M/n/m/m (m \geq n)$  系统, 因为

$$\lambda_i = (m-i)\lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ n\mu, & i = n, n+1, \dots, m \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[ \sum_{j=0}^n C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \sum_{j=n+1}^m C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{j!}{n! n^{j-n}} \right]^{-1},$$

所以

$$E(\theta) = \frac{1}{m\lambda} \left[ \sum_{j=1}^n C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \sum_{j=n+1}^m C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{j!}{n! n^{j-n}} \right],$$

$$E(A) = \frac{1}{n\mu} + \sum_{j=0}^{m-n} P_{m-n}^j \left( \frac{\lambda}{n\mu} \right)^j,$$

$$E(I + \theta) = \frac{1}{m\lambda} \left[ \sum_{j=1}^n C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \sum_{j=n+1}^m C_m^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{j!}{n! n^{j-n}} \right].$$

### 2.3.2 M/G/1 系统的忙期

为了讨论 M/M/1 系统的忙期, 我们先来讨论更一般的 M/G/1 系统的忙期. M/G/1 系统与 M/M/1 系统的区别是服务时间是  $B$  服从一般分布. 设  $E(B) = \frac{1}{\mu}$ ,  $D(B) = \sigma^2$  均存在,  $H(t)$  为  $B$  的分布函数.

设 M/G/1 系统的忙期为  $\theta$ ,  $B$  为一顾客的服务时间,  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松输入(到达)过程.  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  为相互独立且均与  $\theta$  同分布的随机变量,  $\theta^*(s), B^*(s)$  分别为  $\theta, B$  的拉普拉斯-司蒂阶(Laplace-Stieltjes)变换(LST). 由于忙期与服务次序无关, 当系统开始有一个顾客时, 服务台立刻为该顾客服务, 忙期也就开始, 在为该顾客服务时间  $B$  中系统将到达  $N(B)$  多个顾客, 每一个顾客都引出(产生)一个忙期, 故有

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{N(B)}. \quad (2.3.14)$$

由全期望公式, 得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &\equiv E(e^{-s\theta}) && [R_e(s) > 0] \\ &= \int_0^\infty E(e^{-s\theta} | B = t) dH(t) \\ &= \int_0^\infty E(e^{-st + s\theta_1 + \dots + s\theta_{N(t)}}) dH(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=0}^\infty E[e^{-s \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i} | N(t) = n] P\{N(t) = n\} dH(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=0}^\infty E[e^{-s \sum_{i=1}^n \theta_i}] P\{N(t) = n\} dH(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=0}^\infty [\theta^*(s)]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dH(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-[s + \lambda - \lambda \theta^*(s)]t} dH(t) \\ &= B^*[s + \lambda - \lambda \theta^*(s)]. \end{aligned}$$

即

$$\theta^*(s) = B^*[s + \lambda - \lambda\theta^*(s)]. \quad (2.3.15)$$

设  $Z = \theta^*(s)$  则(2.3.15)变为

$$Z = B^*[s + \lambda - \lambda Z]. \quad (2.3.16)$$

现证明上方程在单位圆  $|Z| = 1$  内有惟一解. 为此先介绍如下两个定理.

**儒歇定理** 设  $f(Z)$  与  $g(Z)$  在一个  $Z$  复平面的闭曲线  $C$  上和内部是解析的. 如果在  $C$  上  $|g(Z)| < |f(Z)|$ , 则在  $C$  内,  $f(Z)$  与  $f(Z) + g(Z)$  零点(根数)相同.

**拉格朗日定理** 设  $f(Z)$  和  $g(Z)$  在包围一点  $a$  的闭曲线  $C$  上和内部是解析的, 且在  $C$  上所有点  $Z, \omega$  满足不等式

$$|\omega g(Z)| < |z - a|. \quad (2.3.17)$$

则方程

$$z = a + \omega g(Z) \quad (2.3.18)$$

在  $C$  内关于  $Z$  恰有一个根, 且  $f(Z)$  能被展开成  $\omega$  的幂级数:

$$f(Z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \frac{df(z)}{dz} [g(z)]^n \right\} \Big|_{z=a}. \quad (2.3.19)$$

现证方程(2.3.16)在单位圆  $|Z| = 1$  内有惟一解. 因为在  $|Z| = 1 + \epsilon$  上,

$$|B^*[s + \lambda - \lambda Z]| \leq 1 < |Z| + \epsilon, \epsilon > 0$$

由儒歇定理知,  $Z$  与  $Z - B^*[s + \lambda - \lambda Z]$  在  $|Z| = 1 + \epsilon$  内零点(根数)相同, 都是 1. 现设  $a = 0, \omega = 1, g(z) = B^*[s + \lambda - \lambda Z], f(z) = z$ . 由拉格朗日定理, 得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ [B^*(s + \lambda - \lambda Z)]^n \} \Big|_{z=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [B^*(s + \lambda)]^n. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

记  $D_n = \sum_{i=1}^n B_i$ , 其中  $B_1, B_2, \dots, B_n$  相互独立且均与  $B$  同分布. 则

$$[B^*(s + \lambda)]^n = \{E[e^{-(s+\lambda)B}]\}^n = E[e^{-(s+\lambda)D_n}].$$

故

$$\begin{aligned}
 \theta^*(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dP\{D_n < x\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-(s+\lambda)x} dP\{D_n < x\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{n!} dP\{D_n < x\}. \quad (2.3.21)
 \end{aligned}$$

由反演公式得

$$P\{\theta < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^{n-1}}{n!} dP\{D_n < y\}. \quad (2.3.22)$$

因为

$\theta^{*'}(0) = -E(\theta)$ ,  $\theta^{**}(0) = E(\theta^2)$ ,  $B^{*'}(0) = -E(B)$ ,  $B^{**}(0) = E(B^2)$ ,  
所以, 由(2.3.15) 式得

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu - \lambda}, D(\theta) = \frac{\mu^3 \sigma^2 + \lambda}{(\mu - \lambda)^3}, \lambda < \mu \quad (2.3.23)$$

或因

$$\begin{aligned}
 E[N(B)] &= \int_0^{\infty} E[N(B) | B = t] dH(t) = \int_0^{\infty} E[N(t)] dH(t) \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda t dH(t) = \lambda E(B) = \frac{\lambda}{\mu} \equiv \rho, \quad (2.3.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[N^2(B)] &= \int_0^{\infty} E[N^2(t)] dH(t) = \int_0^{\infty} (\lambda t + \lambda^2 t^2) dH(t) \\
 &= \frac{\lambda}{\mu} + \lambda^2 E(B^2) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \lambda^2 \sigma^2, \quad (2.3.25)
 \end{aligned}$$

由(2.3.14) 式, 得  $E(\theta) = \frac{1}{\mu} + E(\theta)E[N(B)]$ , 即

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right]} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (2.3.26)$$

$$\begin{aligned}
 \text{又 } D(\theta) &= D(B) + D\left[\sum_{i=1}^{N(B)} \theta_i\right] + 2\text{cov}\left(B, \sum_{i=1}^{N(B)} \theta_i\right) \\
 &= \sigma^2 + E[N(B)]D(\theta) + D[N(B)][E(\theta)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2E\left[B \sum_{i=1}^{N(B)} \theta_i\right] - 2E(B)E\left[\sum_{i=1}^{N(B)} \theta_i\right] \\
& = \sigma^2 + \frac{\lambda}{\mu}D(\theta) + (\rho + \lambda^2\sigma^2) \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} + \frac{2\rho E(B^2)}{1 - \rho} \\
& \quad - \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\mu - \lambda} \\
& = \frac{1}{1 - \rho} \left[ \frac{\mu^2\sigma^2 + \rho}{(\mu - \lambda)^2} \right] = \frac{\mu^3\sigma^2 + \lambda}{(\mu - \lambda)^3}, \tag{2.3.27}
\end{aligned}$$

$E(\theta), D(\theta)$  与(2.3.23)式一致.

现讨论  $M/G/1$  系统一个忙期  $\theta$  中服务完的顾客数(记为  $M$ ) 的分布. 类似于(2.3.14)式, 有

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)}, \tag{2.3.28}$$

其中  $M_i$  表示在  $\theta_i$  中服务完的顾客数. 易见  $M_1, M_2, M_3, \cdots$  相互独立, 且均与  $M$  同分布. 现来求  $M$  的 PGFM( $Z$ ). 由(2.3.28)式得

$$\begin{aligned}
M(z) &= E(Z^M) = E[Z^{1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}}] \\
&= Z \int_0^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(t)}} | B = t] dH(t) \\
&= Z \int_0^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(t)}}] dH(t) \\
&= Z \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_n}] P\{N(t) = n\} dH(t) \\
&= Z \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty [M(z)]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dH(t) \\
&= Z \int_0^\infty e^{-\lambda t [1 - M(z)]} dH(t) \\
&= ZB^*[\lambda - \lambda M(Z)]. \tag{2.3.29}
\end{aligned}$$

由于  $M'(1) = E(M), M''(1) = E(M^2) - E(M)$ , 由(2.3.29)式得

$$E(M) = \frac{1}{1 - \rho}, D(M) = \frac{\rho + \lambda^2\sigma^2}{(1 - \rho)^3}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{2.3.30}$$

或由(2.3.28)式也可求得  $E(M)$  与  $D(M)$ .



### 2.3.3 $M/M/n$ 系统的 $k(k \geq 0)$ 阶繁忙期

$M/M/n$  系统如 2.1.1 节所设.

**定理 2.3.4** 设  $A_0$  为  $M/M/n$  系统的 0 阶繁忙期. 则  $A_0$  的 LST 为

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}, \quad \lambda < n\mu \quad (2.3.31)$$

且

$$E(A_0) = \frac{1}{n\mu - \lambda}, \quad D(A_0) = \frac{n\mu + \lambda}{(n\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < n\mu. \quad (2.3.32)$$

**证** 由于  $n$  个服务台独立工作, 每个服务台的服务时间相互独立且都服从参数为  $\mu$  的指数分布, 所以当  $n$  个服务台都进入服务时, 这  $n$  个服务台可以看成服务时间为  $\min_{1 \leq i \leq n} \{B_i\}$  的一个服务台, 其中  $B_i$  表示第  $i$  个服务台的服务时间. 由指数分布的性质知,  $\min_{1 \leq i \leq n} \{B_i\} \sim \Gamma(1, n\mu)$ . 这样, 当  $n$  个服务台都进入服务后,  $M/M/n$  系统可以看成  $M/M/1$  系统.  $A_0$  可以看成  $M/M/1$  系统中的  $\theta$ , 由 (2.3.15) 与 (2.3.23) 立得 (2.3.31) 与 (2.3.32) 式.

**定理 2.3.5** 设  $A_k$  为  $M/M/n$  系统的  $k$  阶繁忙期, 则  $A_k$  的 LST 为

$$A_k^*(s) = [A_0^*(s)]^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.33)$$

其中  $A_0^*(s)$  由 (2.3.31) 式给出. 且

$$E(A_k) = \frac{k+1}{n\mu - \lambda}, \quad D(A_k) = \frac{(k+1)(n\mu + \lambda)}{(n\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < n\mu. \quad (2.3.34)$$

**证** 因为

$$A_k = A_{00} + A_{01} + \dots + A_{0k}, \quad (2.3.35)$$

其中  $A_{0j}$  表示从  $M/M/n$  系统中第一次有  $j$  个顾客在等待服务时起一直到第一次有  $j-1$  个顾客在等待服务时止这段时间  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ . 这里  $-1$  个顾客在等待服务理解为  $n$  个服务台中有一

个空闲.由假设与指数分布的性质知,  $A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0k}$  相互独立且均与  $A_0$  同分布,故

$$A_k^*(s) = E[e^{-sA_k}] = [A_0^*(s)]^{k+1}.$$

由此式可得(2.3.34)式.

**定理 2.3.6** 对于  $M/M/n$  系统,记在一个  $A_k$  中服务完的顾客数为  $M_k (k \geq 0)$ ,则

$$E(M_k) = \frac{n\mu(k+1)}{n\mu - \lambda},$$

$$D(M_k) = \frac{(k+1)(2n^3\mu^3 + n\mu\lambda^2 - n^2\lambda\mu^2)}{(n\mu - \lambda)^3}, \lambda < n\mu. \quad (2.3.36)$$

证 由(2.3.30)式知.在一个  $A_0$  中服务完的平均顾客数为  $\frac{n\mu}{n\mu - \lambda}$ , 方差为  $\frac{2(n\mu)^3 + n\mu\lambda^2 - (n\mu)^2\lambda}{(n\mu - \lambda)^3}$ . 再由(2.3.35)式立得本定理结论.

## § 2.4 $E_r/M/1$ 系统

作为  $M/M/1$  系统的推广.现来考虑  $E_r/M/1$  系统.在该系统中到达间隔时间序列  $\{J_k, k \geq 1\}$  为 i.i.d 随机变量序列,  $J_1 \sim \Gamma(r, \lambda)$ ,  $r$  为正整数.服务时间序列  $\{B_k, k \geq 1\}$  也为 i.i.d 随机变量序列,  $B_1 \sim \Gamma(1, \mu)$ , 且  $\{J_k, k \geq 1\}$  与  $\{B_k, k \geq 1\}$  相互独立.服务机构只有一个服务台.

### 2.4.1 队长的分布

因为  $J_1$  是  $r$  个相互独立同服从参数为  $\lambda$  的指数分布的随机变量之和,所以每个顾客必须经过  $r$  个阶段(称为相位)才能到达系统.通过每个相位的时间都服从参数为  $\lambda$  的指数分布,且相互独立.且当前一个顾客通过  $r$  个相位进入系统后,才允许下一个顾客向第一个相位前进.如果把顾客通过的相位数作为系统的状态,且服务完一个顾客系统就减少了  $r$  个相位.顾客前进一个相位,系统就增加了一个相位,则系统的相位就是一个齐次马尔可夫链.即设

$Y(t)$  表示时刻  $t$  时系统中的相位数, 则  $\{Y(t), t \geq 0\}$  是一个齐次马尔可夫链. 这是因为由 (1.3.8) — (1.3.10) 式, 有

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i+1 \mid Y(t) = i\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } lr+1 \text{ 个相位且服务了 } l \text{ 个顾客}\} \\ &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了一个相位且服务了 0 个顾客}\} \\ &\quad + o(\Delta t) \\ &= (1 - e^{-\lambda\Delta t})e^{-\mu\Delta t} + o(\Delta t) \\ &= \lambda\Delta t + o(\Delta t), i \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,i-r}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i-r \mid Y(t) = i\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } lr \text{ 个相位且服务了 } l+1 \text{ 个顾客}\} \\ &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 0 个相位且服务了 1 个顾客}\} \\ &\quad + o(\Delta t) \\ &= (1 - e^{-\mu\Delta t})e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\ &= \mu\Delta t + o(\Delta t), i \geq r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i \mid Y(t) = i\} \\ &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 0 个相位且服务了 0 个顾客}\} \\ &\quad + o(\Delta t) \\ &= e^{-\lambda\Delta t}e^{-\mu\Delta t} + o(\Delta t) \\ &= 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t), i \geq r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i \mid Y(t) = i\} \\ &= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 0 个相位}\} + o(\Delta t) \\ &= e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\ &= 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), i < r, \end{aligned}$$

其他,  $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$ , 从而齐次马氏链的  $Q$  矩阵 (密度矩阵) 中的元素为

$$\begin{cases} q_{i,i+1} = \lambda, & i \geq 0, \\ q_{ii} = -(\lambda + \mu), & i \geq r, \\ q_{ii} = -\lambda, & i < r, \\ q_{i,i-r} = \mu, & i \geq r, \\ q_{ij} = 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

由平稳方程  $\pi Q = 0$ , 其中  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ , 得

$$\begin{cases} \lambda \pi_0 = \mu \pi_r, \\ \lambda \pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu \pi_{j+r}, & 1 \leq j \leq r-1, \\ (\lambda + \mu) \pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu \pi_{j+r}, & j \geq r. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

设 
$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \quad (2.4.3)$$

则得

$$(\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j - \mu \sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j-1} z^j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+r} z^j, \quad (2.4.4)$$

即

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) [\pi(z) - \pi_0] - \mu \sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j \\ &= \lambda z \pi(z) + \frac{\mu}{z^r} \left[ \pi(z) - \sum_{j=0}^r \pi_j z^j \right]. \end{aligned}$$

注意到  $\lambda \pi_0 = \mu \pi_r$  上式变为

$$\pi(z) z^r (\lambda + \mu) - \mu z^r \sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j = \lambda z^{r+1} \pi(z) + \mu \pi(z) - \mu \sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j.$$

从而

$$\pi(z) = (1 - z^r) \sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j / [1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho) z^r], \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.4.5)$$

$\rho < 1$  是系统的平稳条件. 在  $\rho < 1$  下, 现证(2.4.5)式的分母在单位圆  $|z| = 1$  外有惟一的零点. 设  $u = \frac{1}{z}$ , 则有

$$1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r = \frac{1}{u^{r+1}}[u^{r+1} + \rho - (1 + \rho)u].$$

令

$$f(u) = -(1 + \rho)u, g(u) = \rho + u^{r+1}.$$

显然  $f(u)$  有惟一的零点  $u = 0$ . 对满足:  $0 < \delta < 1$  的任意  $\delta$ , 在圆  $|u| = 1 - \delta$  上有

$$\begin{aligned} |g(u)| &\leq \rho + (1 - \delta)^{r+1} = \rho + [1 - (r + 1)\delta] + o(\delta) \\ &= 1 + \rho - (r + 1)\delta + o(\delta), \end{aligned}$$

$$|f(u)| = (1 + \rho)(1 - \delta) = (1 + \rho) - (1 + \rho)\delta.$$

从而  $|g(u)| < |f(u)|$ . 由儒歇定理知,  $f(u) + g(u)$  在  $|u| = 1 - \delta$  内有惟一的零点, 又由于  $\delta$  的任意性知,  $f(u) + g(u)$  在  $|u| = 1$  内有惟一的零点, 从而  $1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r$  在单位圆外有惟一的零点. 记其零点为  $z_0 = \frac{1}{u_0}$ , 又  $z = 1$  是  $1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r$  的一个零点, 而其它  $r - 1$  个零点都在单位圆内. 又因当  $|z| \leq 1$  时, 母函数  $\pi(z)$  收敛, 所以当  $|z| \leq 1$  时  $\pi(z)$  解析, 从而 (2.4.5) 式分子与分母在  $|z| \leq 1$  内有相同的根. 又因  $1 - z^r$  的零点都在单位圆上, 所以  $\frac{1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r}{(z - 1)(z - z_0)}$  与  $\sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j$  在单位圆内有相同的  $r - 1$  个零点(根), 即

$$\frac{1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r}{(z - 1)(z - z_0)} = C \sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j, \quad (2.4.6)$$

其中  $C$  为一个常数. 将 (2.4.6) 式代入 (2.4.5) 式得

$$\pi(z) = \frac{1 - z^r}{c(z - 1)(z - z_0)}. \quad (2.4.7)$$

令  $z = 1$ , 因为  $\pi(1) = 1$ , 得

$$C = -\frac{r}{1 - z_0}. \quad (2.4.8)$$

从而

$$\pi(z) = \frac{(1 - z_0)(1 - z^r)}{r(1 - z)(z - z_0)} = \frac{(1 - z^r)(1 - 1/z_0)}{r(1 - z)(1 - z/z_0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-z'}{r} \left[ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z_0} \frac{1}{(1-z/z_0)} \right] \\
&= \frac{1-z'}{r} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} z^j - \frac{1}{z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^j \right] \\
&= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}\right) z^j - \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}\right) z^{j+r}. \quad (2.4.9)
\end{aligned}$$

故得

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}\right), & 0 \leq j \leq r-1, \\ \frac{1}{rz_0^{j-r+1}} \left(1 - \frac{1}{z_0^r}\right), & j \geq r. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

因为  $1 + \rho z_0^{r+1} - (1 + \rho) z_0^r = 0$ , 即  $z_0^r - 1 = \rho z_0^r (z_0 - 1)$ , 所以  $1 - \frac{1}{z_0^r} = \rho z_0^r (z_0 - 1)$ , 从而 (2.4.10) 式变为

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}\right), & 0 \leq j < r, \\ \frac{\rho(z_0 - 1)}{rz_0^{j-r+1}}, & j \geq r. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

现考虑  $E_r/M/1$  系统队长的平稳分布. 设  $p_n$  为系统中有  $n$  个顾客的概率. 因为当系统中有  $n$  个顾客时, 系统中的相位为  $nr - nr + r - 1$ , 所以

$$p_n = \sum_{j=nr}^{(n+1)r-1} \pi_j = \frac{\rho(z_0^r - 1)}{rz_0^{nr}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.12)$$

因为  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(z_0^r - 1)}{rz_0^{nr}} = \frac{\rho}{r}, \quad (2.4.13)$$

所以  $p_0 = 1 - \frac{\rho}{r}$ , 从而

$$p_n = \begin{cases} 1 - \frac{\rho}{r}, & n = 0, \\ \frac{\rho(z_0^r - 1)}{rz_0^{nr}}, & n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (2.4.14)$$

由(2.4.14)式,得平均队长与平均等待队长分别为

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\rho(z_0^r - 1)}{r z_0^{nr}} = \frac{\rho z_0^r}{r(z_0^r - 1)}, \quad (2.4.15)$$

$$E(X_q) = E(X) - \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{r(z_0^r - 1)}. \quad (2.4.16)$$

## 2.4.2 等待时间的分布

现考虑 FCFS  $E_r/M/1$  系统中一顾客等待时间  $W$  的分布. 因为当一顾客到达系统时, 系统中相位数可能是  $r, 2r, 3r, \dots$ , 故顾客到达时的概率为

$$P\{\text{顾客到达系统}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{(n+1)r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(z_0 - 1)}{r z_0^{nr+1}} = \frac{\rho(z_0 - 1)z_0^{-1}}{r(z_0^r - 1)}, \quad (2.4.17)$$

所以,  $P\{\text{系统已有 } n \text{ 个顾客} \mid \text{顾客到达系统}\}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi_{(n+1)r}}{P\{\text{顾客到达系统}\}} = \frac{\rho(z_0 - 1)}{r z_0^{nr+1}} \bigg/ \frac{\rho(z_0 - 1)z_0^{-1}}{r(z_0^r - 1)} \\ &= (z_0^r - 1)/z_0^{(n+1)r}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

从而

$$p\{\text{系统没有顾客} \mid \text{顾客到达系统}\} = \frac{z_0^r - 1}{z_0^r}. \quad (2.4.19)$$

故到达系统的顾客等待时间  $W$  的分布函数为: 当  $t > 0$  时

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P\{W < t\} = P\{W = 0\} + P\{0 < W < t\} \\ &= \frac{z_0^r - 1}{z_0^r} + \sum_{n=1}^{\infty} P\{0 < W < t \mid \text{到达时系统中有 } n \text{ 个顾客}\} \\ &\quad \cdot \frac{z_0^r - 1}{z_0^{(n+1)r}} \\ &= \frac{z_0^r - 1}{z_0^r} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x} dx \frac{z_0^r - 1}{z_0^{(n+1)r}} \\ &= \frac{z_0^r - 1}{z_0^r} + \int_0^t \frac{\mu(z_0^r - 1)}{z_0^{2r}} e^{-\mu x(1-z_0^{-r})} dx \end{aligned}$$

$$= 1 - z_0^{-r} e^{-\mu t(1-z_0^{-r})}. \quad (2.4.20)$$

从而,  $W$  的密度函数为

$$f_w(t) = \begin{cases} (1 - z_0^{-r})\delta(t) + \mu z_0^{-r}(1 - z_0^{-r})e^{-\mu t(1-z_0^{-r})}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (2.4.21)$$

所以

$$E(W) = \frac{1}{\mu(z_0^r - 1)}, \quad (2.4.22)$$

$$E(W^2) = \frac{2z_0^r}{\mu^2(z_0^r - 1)}, D(W) = \frac{2z_0^r - 1}{\mu^2(z_0^r - 1)^2}. \quad (2.4.23)$$

### 2.4.3 忙 期

设  $\theta$  为系统的忙期,  $X(t)$  为在时间区间  $(0, t]$  中到达系统的顾客数,  $N(t)$  为在时间区间  $(0, t]$  中系统增加的相位数, 则由假设知  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松过程, 在一个服务时间  $B$  中有  $n$  个顾客到达系统的概率为

$$\begin{aligned} P\{X(B) = n\} &= P\{nr \leq N(B) \leq (n+1)r - 1\} = \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} P\{N(B) = k\} \\ &= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \int_0^\infty p\{N(B) = k \mid B = t\} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{\mu \lambda^k t^k}{k!} dt \\ &= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\mu \lambda^k}{k! (\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} = \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right] \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right]^{nr}, \end{aligned}$$

即

$$P\{X(B) = n\} = \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right] \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.24)$$



所以

$$E[X(B)] = \frac{\lambda^r}{(\lambda + \mu)^r - \lambda^r}, \quad D[X(B)] = \frac{\lambda^r(\lambda + \mu)^r}{[(\lambda + \mu)^r - \lambda^r]^2}. \quad (2.4.25)$$

由于忙期与顾客的服务顺序无关,因此有

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{X(B)}, \quad (2.4.26)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$  为相互独立同分布随机变量,且均与  $\theta$  同分布.

由全期望公式,  $\theta$  的 LST 为

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= E(e^{-s\theta}) = E\{e^{-s[B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{X(B)}]}\} \\ &= \int_0^\infty E\{e^{-s[t+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{X(t)}]}\} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E\{e^{-s[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n]}\} P\{X(t) = n\} \mu e^{-(\mu+s)t} dt \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu+s)t} \sum_{n=0}^\infty [\theta^*(s)]^n \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\lambda^k t^k}{k!} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty [\theta^*(s)]^n \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\mu \lambda^k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda + \mu + s)^{k+1}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty [\theta^*(s)]^n \frac{\mu}{\mu + s} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu + s} \right)^r \right] \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \mu + s} \right]^{nr} \\ &= \frac{\mu [(\lambda + \mu + s)^r - \lambda^r]}{(\mu + s) [(\lambda + \mu + s)^r - \lambda^r \theta^*(s)]}. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

从而

$$E(\theta) = \frac{(\lambda + \mu)^r - \lambda^r}{\mu [(\lambda + \mu)^r - 2\lambda^r]}, \quad (2.4.28)$$

$$D(\theta) = \frac{2rq^r}{\mu(\lambda + \mu)(1 - 2q^r)^2} + \frac{(1 - q^r)(1 - 3q^r + 4q^{2r})}{\mu^2(1 - 2q^r)^3}, \quad (2.4.29)$$

其中

$$q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

当  $r = 1$  时,  $E_r/M/1$  系统就变为  $M/M/1$  系统,  $X(t) = N(t)$  且

$$E[X(B)] = \frac{\lambda}{\mu}, \theta^*(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s - \lambda\theta^*(s)},$$

$$E(\theta) = \left| \frac{1}{\mu - \lambda}, D(\theta) \right| = \frac{\lambda + \mu}{(\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < \mu.$$

现讨论在一个忙期中服务完的顾客数  $M$  的分布. 设  $M_1, M_2, M_3, \dots$  相互独立且均与  $M$  同分布. 因为

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \dots + M_{X(B)}, \quad (2.4.30)$$

故  $M$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} M(z) &\equiv E(z^M) = ZE[Z^{M_1+M_2+\dots+M_{X(B)}}] \\ &= Z \sum_{n=0}^{\infty} [M(Z)]^n \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r \right] \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r \right]^n \\ &= Z \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r \right] \frac{(\lambda + \mu)^r}{(\lambda + \mu)^r - \lambda^r M(Z)} \\ &= Z[1 - q^r] \frac{1}{1 - q^r M(Z)}, \quad q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

由(2.4.31)或(2.4.30)式得

$$E(M) = \frac{1 - q^r}{1 - 2q^r}, \quad 0 < q < 1, \quad (2.4.32)$$

$$D(M) = \frac{(1 - q^r)q^r}{(1 - 2q^r)^3}, \quad 0 < q < 1, \quad (2.4.33)$$

其中

$$q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

## § 2.5 批服务的 $M/M^r/1$ 系统

### 2.5.1 $M/M^r/1$ 系统

$M/M^r/1$  系统与  $M/M/1$  系统的区别是每次服务台不是服务一个顾客, 而是  $r$  个顾客. 当系统中的顾客数不足  $r$  个时, 服务台不进行服务, 一直等待系统中的顾客数到达  $r$  个时才开始进行服务. 其他假设与上述的  $M/M/1$  系统相同.

由于  $M/M^r/1$  系统中的顾客数就是上节  $E_r/M/1$  系统中的

相位数,因此  $M/M^r/1$  系统队长的平稳分布为

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}\right), & 0 \leq j \leq r-1, \\ \frac{\rho(z_0 - 1)}{r} z_0^{r-j-1}, & j \geq r, \end{cases} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \quad (2.5.1)$$

其中  $z_0$  满足:  $1 + \rho z_0^{r+1} = (1 + \rho) z_0^r$ .

### 2.5.2 最多服务 $r$ 个的批服务 $M/M/1$ 系统

现介绍最多服务  $r$  个顾客的批服务  $M/M/1$  系统. 现在的系统每次最多服务  $r$  个顾客, 最少服务一个顾客, 其它假设与  $M/M/1$  系统相同. 当  $r = 1$  时就变为  $M/M/1$  系统.

设  $X(t)$  为时刻  $t$  时系统中的顾客数, 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  是一个齐次马氏链. 类似于(2.4.1)式的推导,  $\{X(t), t \geq 0\}$  的  $Q$  矩阵中的元素为

$$\begin{cases} q_{i,i+1} = \lambda, & i \geq 0, \\ q_{i0} = \mu, & i \leq r, \\ q_{ii} = -(\mu + \lambda), & i > 0, \\ q_{i,i-r} = \mu, & i > r, \\ q_{00} = -\lambda \\ q_{ij} = 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

由 (1.5.25) 式得平稳方程:

$$\begin{cases} \lambda \pi_0 = \mu \sum_{i=1}^r \pi_i, \\ (\lambda + \mu) \pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu \pi_{r+j}, & j = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.5.3)$$

设概率分布  $\{\pi_i, i \geq 0\}$  的 PGF 为  $\pi(z)$ , 则由 (2.5.3) 式, 得

$$(\lambda + \mu)[\pi(z) - \pi_0] = \lambda z \pi(z) + \frac{\mu}{z^r} \left[ \pi(z) - \sum_{j=0}^r z^j \pi_j \right].$$

从而

$$\pi(z) = \frac{z^r (\lambda + \mu) \pi_0 - \mu \sum_{j=0}^r \pi_j z^j}{(\lambda + \mu - \lambda z) z^r - \mu}, \quad (2.5.4)$$

由(2.5.3)式的第一式,得

$$z^r(\lambda + \mu)\pi_0 = \mu z^r \sum_{j=0}^r \pi_j.$$

从而(2.5.4)式变为

$$\pi(z) = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} \pi_j (z^j - z^r)}{1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho) z^r}. \quad (2.5.5)$$

易见(2.5.5)式的分母与(2.4.5)式的分母相同,所以

$$1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho) z^r$$

在单位圆  $|z| = 1$  外有惟一零点(记为  $z_0$ ) 又  $z = 1$  是(2.5.5)式分子、分母的零点,且当  $|z| \leq 1$  时,  $\pi(z)$  是解析的,故在  $|z| < 1$  内,

$\frac{1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho) z^r}{(z - 1)(z - z_0)}$  与  $c \sum_{k=0}^{r-1} \pi_k \frac{z^k - z^r}{z - 1}$  有相同的  $r - 1$  个零点,即

$\frac{1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho) z^r}{(z - 1)(z - z_0)} = c \sum_{k=0}^{r-1} \pi_k \frac{z^k - z^r}{z - 1}$ . 从而由(2.5.5)式,得

$$\pi(z) = \frac{1}{c(z - z_0)}.$$

又由  $\pi(1) = 1$ , 得  $c = \frac{1}{1 - z_0}$ , 从而

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \frac{1 - z_0}{z - z_0} = \frac{1 - 1/z_0}{1 - z/z_0} = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

故队长的平稳分布为

$$\pi_k = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \left(\frac{1}{z_0}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.5.7)$$

所以平均队长为

$$E(X) = \frac{1}{z_0 - 1}. \quad (2.5.8)$$

有利特尔公式平均逗留时间为

$$E(T) = \frac{1}{\lambda(z_0 - 1)}. \quad (2.5.9)$$

## § 2.6 $E_r^\xi/M/1$ 系统

$E_r^\xi/M/1$  系统是  $E_r/M/1$  系统的推广. 除每次到达是  $\xi$  个顾客外, 其他假设与 § 2.4 中  $E_r/M/1$  的系统相同.  $\xi$  为取正整数值随机变量. 记  $E(\xi) = d, E(\xi^2) = d^{(2)}$ , 并设  $\xi, \{J_k, k \geq 1\}, \{B_k, k \geq 1\}$  相互独立. 设  $\xi_k$  为第  $k$  批到达的顾客数. 则  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  为 i.i.d 随机变量序列, 且均与  $\xi$  同分布.

### 2.6.1 队长的分布

**定理 2.6.1** 设  $Q$  为一个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数, 则  $Q$  的 PGF 为

$$Q(Z) = \frac{[1 - g' - dg'] [1 - \xi(z)]}{d[1 + z\xi(z)g' - g' - z]},$$

$$g \equiv \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \rho \equiv \frac{\lambda d}{r\mu} < 1, \quad (2.6.1)$$

其中  $\xi(z) = E(z^\xi)$ , 且  $E(Q) = \frac{2d^2g' + (1 - g')(d^{(2)} - d)}{2d(1 - g' - dg')}$ ,  $\rho < 1$ .

$$(2.6.2)$$

**证** 设  $Q_n$  为第  $n$  个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数.  $Y_n$  为在第  $n$  个顾客服务时间中到达的顾客数, 并设

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

则易见有关系式

$$Q_{n+1} = Q_n - \epsilon(Q_n) + Y_{n+1} + (\xi - 1)\epsilon(1 - Q_n), \quad (2.6.4)$$

设  $\{X(t), t \geq 0\}$  为系统的输入过程, 即  $X(t)$  表示在时间区间  $(0, t]$  中到达的顾客数.  $\bar{X}(t)$  表示在  $(0, t]$  中到达的批数.  $\{N(t), t \geq 0\}$  表示参数为  $\lambda$  的泊松过程. 则有  $Y_{n+1} = X(B_{n+1})$ , 且  $Y_{n+1}, Q_n, \xi$  相互独立. 由全期望公式,  $Y_{n+1}$  的 PGF 为

$$Y_{n+1}(z) \equiv E(z^{Y_{n+1}}) = E(Z^{X(B_{n+1})})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty E[Z^{X(t)}] \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty E[Z^{X(t)} | \bar{X}(t) = j] P\{\bar{X}(t) = j\} \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty [E(z^\xi)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty [\xi(z)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} \frac{\lambda^i \mu}{i!} \int_0^\infty t^i e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty [\xi(z)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} \frac{\lambda^i \mu}{(\lambda + \mu)^{i+1}} \\
&= \sum_{j=0}^\infty [\xi(z)]^j (1 - g^r) g^{jr} = \frac{1 - g^r}{1 - g^r \xi(z)}, \quad (2.6.5)
\end{aligned}$$

其中  $\xi(Z)$  为  $\xi$  的 PGF, 于是  $Q_{n+1}$  的 PGF 为

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(z) &= E(Z^{Y_{n+1}}) E[Z^{Q_n - \varepsilon(Q_n) + (\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}] \\
&= \frac{1 - g^r}{1 - g^r \xi(z)} \left[ \frac{\xi(z) - 1}{z} P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z} Q_n(z) \right].
\end{aligned} \quad (2.6.6)$$

在条件  $\rho < 1$  下, 令  $n \rightarrow \infty$ , 记

$$Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z), \quad P\{Q = 0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = 0\},$$

得

$$Q(z) = \frac{1 - g^r}{1 - g^r \xi(z)} \left[ \frac{\xi(z) - 1}{z} P\{Q = 0\} + \frac{Q(z)}{z} \right].$$

解出  $Q(z)$ , 得

$$Q(z) = \frac{(1 - g^r) P\{Q = 0\} [\xi(z) - 1]}{z - g^r z \xi(z) - 1 + g^r}. \quad (2.6.7)$$

令  $z = 1$ , 得

$$P\{Q = 0\} = \frac{1 - g^r - d g^r}{d(1 - g^r)}. \quad (2.6.8)$$

将(2.6.8)代入(2.6.7)立得(2.6.1). 由(2.6.1)可得(2.6.2).

## 2.6.2 忙期的分布

**定理 2.6.2** 设  $\theta$  为一个顾客引出的忙期长,  $\Theta$  为由一批( $\xi$ 个)

顾客引出的忙期长( $\Theta$  为系统的真正忙期), 则  $\theta, \Theta$  的 LST 分别为

$$\theta^*(s) = \frac{\mu[(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r]}{(s + \mu)\{(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r \xi[\theta^*(s)]\}}, \quad (2.6.9)$$

$$\Theta^*(s) = \xi \left\{ \frac{\mu[(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r]}{(s + \mu)\{(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r \xi[\Theta^*(s)]\}} \right\}, \quad (2.6.10)$$

且

$$E(\theta) = \frac{(1 - g^r)}{\mu(1 - g^r - dg^r)}, \quad \rho < 1, \quad (2.6.11)$$

$$E(\Theta) = \frac{d(1 - g^r)}{\mu(1 - g^r - dg^r)}, \quad \rho < 1. \quad (2.6.12)$$

证 因为忙期与服务顺序无关, 所以, 我们可依如下顺序进行服务. 在某个顾客的服务时间  $B$  中, 可能到达系统若干批顾客. 当该顾客被服务后, 接着为第一批顾客服务, 当第一批所有顾客以及由第一批顾客引出的所有顾客都被服务完后再为第二批顾客以及由第二批顾客引出的所有顾客服务, 依此类推, 于是有

$$\theta = B + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{\bar{X}(B)}, \quad (2.6.13)$$

其中  $\Theta_i$  为在服务时间  $B$  中到达的第  $i$  批顾客引出的忙期长. 易见  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \cdots$  相互独立且均与  $\Theta$  同分布.  $\bar{X}(B)$  表示在  $B$  中到达的批数. 又因每批有  $\xi$  个顾客, 所以有

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\xi} \theta_i, \quad (2.6.14)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$ , 为相互独立且均与  $\theta$  同分布的随机变量序列. 由上两式得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &\equiv E(e^{-s\theta}) = \int_0^{\infty} e^{-st} E[e^{-s(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{\xi(t)})}] \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [\theta^*(s)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} \frac{(\mu\lambda)^i}{(s + \lambda + \mu)^{i+1}} \\ &= \frac{\mu[(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r]}{(s + \mu)[(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r \theta^*(s)]} \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

与

$$\Theta^*(s) = \xi[\theta^*(s)]. \quad (2.6.16)$$

将(2.6.16)代入(2.6.15)立得(2.6.9).再由(2.6.16)与(2.6.9)立得(2.6.10).因为

$$\begin{aligned}
 E[\bar{X}(B)] &= \int_0^\infty E[\bar{X}(t)] \mu e^{-\mu t} dt \\
 &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} \sum_{j=0}^\infty j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dt \\
 &= \sum_{j=0}^\infty j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} (1-g) g^i \\
 &= \frac{g^r}{1-g^r},
 \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

所以由(2.6.13), (2.6.14) 与(2.6.17), 得

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= \frac{1}{\mu} + E(\Theta) E[\bar{X}(B)] = \frac{1}{\mu} + \frac{g^r}{1-g^r} E\left[\sum_{i=1}^{\xi} \theta_i\right] \\
 &= \frac{1}{\mu} + \frac{dg^r}{1-g^r} E(\theta).
 \end{aligned} \tag{2.6.18}$$

由(2.6.18)立得(2.6.11).由(2.6.11)与(2.6.14)立得(2.6.12).或由(2.6.9)亦可得(2.6.11),由(2.6.10)亦可得(2.6.12).定理 2.6.2 证毕.

**定理 2.6.3** 设  $M$  为在  $\theta$  中服务完的顾客数,  $\Sigma$  为在  $\Theta$  中服务完的顾客数, 则  $M, \Sigma$  的 PGF 分别为

$$M(Z) = \frac{Z(1-g^r)}{1-g^r \xi[M(Z)]}, \tag{2.6.19}$$

$$\Sigma(z) = \xi\left[\frac{z(1-g^r)}{1-g^r \Sigma(Z)}\right], \tag{2.6.20}$$

且

$$E(M) = \frac{1-g^r}{1-g^r-dg^r}, \quad \rho < 1, \tag{2.6.21}$$

$$E(\Sigma) = \frac{d(1-g^r)}{1-g^r-dg^r}, \quad \rho < 1. \tag{2.6.22}$$

**证** 类似于定理 2.6.2 的分析, 有

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{\bar{X}(B)} \tag{2.6.23}$$

$$\text{与 } \Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \tag{2.6.24}$$



其中  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$  为相互独立且均与  $\Sigma$  同分布的随机变量序列.  $M_1, M_2, M_3, \dots$  为相互独立且均与  $M$  同分布的随机变量序列. 再用证明定理 2.6.2 的方法可证定理 2.6.3.

### 2.6.3 等待时间的分布

**定理 2.6.4** 设  $W$  为一顾客的等待时间, 则在先来后服务与非抢占的情况下,  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{d\mu g^r [(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r] \left[ 1 - \xi \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right) \right]}{d(1 - g^r) S[(s + \lambda + \mu)^r - \lambda^r \Theta^*(s)]} + \frac{(1 - g^r - dg^r)(s + \mu) \left[ 1 - \xi \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right) \right]}{(1 - g^r) ds} \quad (2.6.25)$$

且

$$E(W) = \frac{1 - g^r}{\mu(1 - g^r - dg^r)} + \frac{d^{(2)} - d}{2d\mu}, \quad \rho < 1. \quad (2.6.26)$$

**证** 设  $A$  为系统中任一个顾客. 则其等待时间由两部分组成. 一部分是  $A$  的所在批的等待时间 (即  $A$  所在批中第一个被服务的顾客的等待时间), 记为  $W_f$ , 另一部分是  $A$  在批中等待时间, 记为  $W_s$ , 易见  $W_f$  与  $W_s$  独立, 故  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = W_f^*(s) W_s^*(s). \quad (2.6.27)$$

因为  $A$  为所在批中的任一个顾客, 所以可以在  $\xi$  个顾客组成的队列中的  $\xi$  个位置的任一个位置. 现依如下方法确定  $A$  在队列中的位置: 在批服务时间  $U \equiv \sum_{i=1}^{\xi} B_i$  中任取一点, 该点将依概率为 1 落在某个服务时间  $B$  中, 现以  $B$  所在批队列中的位置为  $A$  在批队列中的位置是合理的. 由图 2-2, 有

$$U_+ = W_s + B_+. \quad (2.6.28)$$

由于  $B_+$  与  $B$  同分布, 且  $B_+$  与  $W_s$  独立, 所以有

$$U_+^*(s) = W_s^*(s) B_+^*(s) = W_s^*(s) \frac{\mu}{\mu + s}.$$

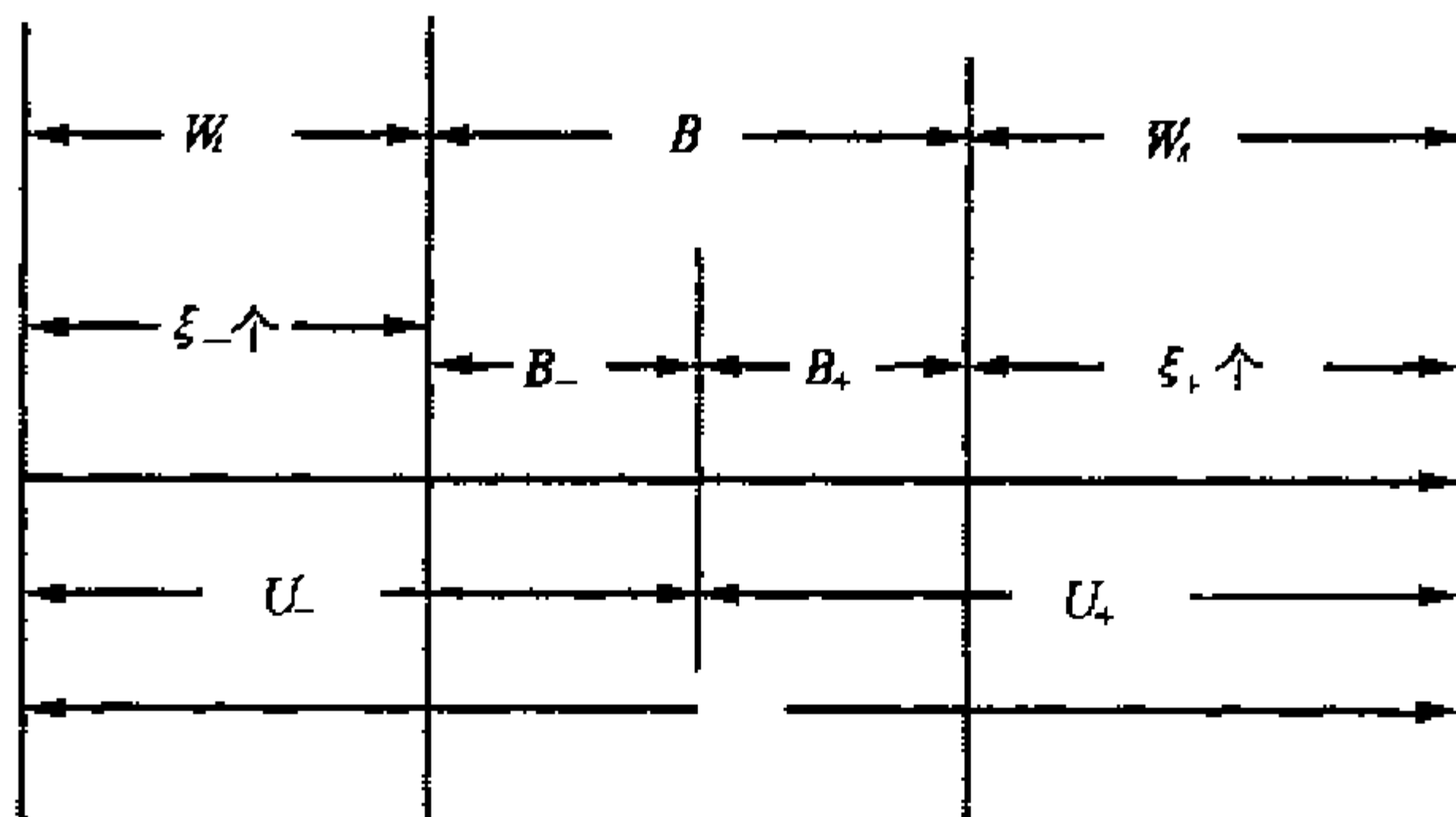


图 2-2

由 (1.6.30) 得

$$\frac{1 - U^*(s)}{sE(U)} = W_s^*(s) \frac{\mu}{\mu + s}.$$

又因  $U$  的 LST 为

$$U^*(s) = \xi[B^*(s)] = \xi\left(\frac{\mu}{\mu + s}\right), E(U) = E(\xi)E(B) = \frac{d}{\mu},$$

所以得

$$W_s^*(s) = \frac{(\mu + s) \left[ 1 - \xi\left(\frac{\mu}{\mu + s}\right) \right]}{ds}. \quad (2.6.29)$$

又因, 当  $A$  所在批到达系统时, 如果系统不空, 有

$$W_f = B_+ + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{\bar{X}(B_+)}. \quad (2.6.30)$$

因为  $B_+$  与  $B$  同分布, 如果记  $p = P\{\text{到达时系统不空}\}$ , 则

$$W_f^*(s) = p\theta^*(s) + 1 - p.$$

由 [11] 知, 在任意时刻系统的队长  $L$  的 PGF 为

$$L(z) = \frac{Q(z)}{\xi_-(z)}, \quad (2.6.31)$$

其中  $\xi_-(z)$  是  $\xi_-$  的 PGF, 由图 2-2 知

$$W_i^*(s) = E(e^{-s \sum_{i=1}^{\xi_-} B_i}) = \xi_-[B^*(s)]. \quad (2.6.32)$$

又

$$U_-^*(s) = W_i^*(s)B_-^*(s) = W_i^*(s)\frac{\mu}{\mu+s},$$

即

$$\frac{1 - U_-^*(s)}{sE(U)} = \frac{\mu\{1 - \xi[B^*(s)]\}}{sd} = W_i^*(s)\frac{\mu}{\mu+s}.$$

故

$$W_i^*(s) = \frac{(\mu+s)\left[1 - \xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{ds}. \quad (2.6.33)$$

由(2.6.32)与(2.6.33)得 [令  $B^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s} = z$ ]

$$\xi_-(z) = \frac{(\mu+s)[1 - \xi(z)]}{ds} = \frac{1 - \xi(z)}{(1-z)E(\xi)}. \quad (2.6.34)$$

从而

$$L(z) = \frac{d(1-z)Q(z)}{1 - \xi(z)}. \quad (2.6.35)$$

令  $z = 0$ , 得

$$1 - p = L(0) = \frac{1 - g^r - dg^r}{1 - g^r}. \quad (2.6.36)$$

把(2.6.36)代入(2.6.31)后,再将(2.6.21)与(2.6.29)代入(2.6.27)立得(2.6.25).

由(2.6.25)可得(2.6.26). 或由于  $W = W_f + W_s$  和(2.6.28)与(2.6.30)亦可得(2.6.26).

**定理 2.6.5** 设  $W$  为一个顾客的等待时间,则对于先来先服务非抢占情况下,  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{(1-\delta)(ds+\mu)(s+\mu)\left[1 - \xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{ds[ds+\mu(1-\delta)]}, \quad (2.6.37)$$

且

$$E(W) = \frac{d\delta}{\mu(1-\delta)} + \frac{d^{(2)} - d}{2d\mu}, \quad (2.6.38)$$

其中  $\delta$  满足

$$\delta = \frac{\lambda^r}{\left[ \lambda + \frac{\mu}{d}(1 - \delta) \right]^r}. \quad (2.6.39)$$

证  $W$  这时仍由两部分组成. 一部分是批等待时间  $W_f$ , 另一部分是  $A$  在批中的等待时间  $W_t$ ,  $W_t$  的 LST 由 (2.6.33) 给出. 由 [6] 知, 对于到达间隔时间  $J$  服从一般分布的  $G/M/1$  系统, 在先来先服务非抢占的情况下, 一个顾客的等待时间  $W_g$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \delta e^{-\mu(1-\delta)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.6.40)$$

故  $W_g$  的 LST 为

$$W_g^*(s) = \frac{(1 - \delta)(s + \mu)}{s + \mu(1 - \delta)}, \quad (2.6.41)$$

其中  $\delta$  满足  $\delta = J^*(\mu - \mu\delta)$ , [ $J^*(s)$  为  $J$  的 LST]. 所以, 对于  $E_r/M/1$  系统, 这时 (2.6.41) 变为 [因  $J^*(s) = \frac{\lambda^r}{(\lambda + s)^r}$ ]

$$W_g^*(s) = \frac{(1 - \delta)(\mu + s)}{s + \mu(1 - \delta)}, \quad \delta \text{ 满足 } \delta = \frac{\lambda^r}{(\mu - \mu\delta + \lambda)^r}.$$

从而, 对于  $E_r^c/M/1$  系统, 可以看成到达间隔时间  $J \sim \Gamma(r, \lambda)$  服务时间  $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i$  的系统.

因为  $E(U) = \frac{d}{\mu}$ , 所以  $W_f$  的 LST 为

$$W_f^*(s) = \frac{(1 - \delta)(ds + \mu)}{ds + \mu(1 - \delta)}, \quad \delta \text{ 满足: } \delta = \frac{\lambda^r}{\left[ \lambda + \frac{\mu}{d}(1 - \delta) \right]^r}. \quad (2.6.42)$$

由 (2.6.42) 与 (2.6.33) 立得 (2.6.37). 由 (2.6.37) 可得 (2.6.38).

## § 2.7 具有反馈的 $E_r^c/M/1$ 系统

具有反馈的  $E_r^c/M/1$  系统是系统  $E_r^c/M/1$  的推广, 前者与后者的区别是: 每个顾客被服务完后以概率  $\sigma$  离开系统, 而以概率  $\bar{\sigma} \equiv 1 - \sigma$  立刻反馈到队尾等待下一次的服务. 设  $\eta$  表示一个顾客总

的服务次数, 则  $\eta \sim \text{Geo}(\sigma)$ .

### 2.7.1 队长的分布

**定理 2.7.1** 设  $Q$  表示一个顾客被服务完时(不一定离开系统)系统中的顾客数, 则  $Q$  的 PGF 为

$$Q(z) = \frac{(\sigma + \bar{\sigma}z)[\xi(z) - 1][1 - g' - dg' - \bar{\sigma}(1 - g')]}{d[z - zg'\xi(z) - (1 - g')(\sigma + \bar{\sigma}z)]},$$

$$\rho < 1, \quad (2.7.1)$$

且

$$E(Q) = \frac{[d - 2\sigma d + d^{(2)}][1 - g' - dg' - \bar{\sigma}(1 - g')] + d^2 g' + d d^{(2)} g'}{2[1 - g' - dg' - \bar{\sigma}(1 - g')]^2},$$

$$\rho < 1, \quad (2.7.2)$$

其中  $g = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ,  $\xi(z)$  为  $\xi$  的 PGF,  $\sigma_1^2 = D(\xi)$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{d\mu\sigma}$ .

**证** 设  $Q_n$  为第  $n$  个顾客被服务完时(不一定离开系统)系统中的顾客数, 则有

$$Q_{n+1} = Q_n - \epsilon(Q_n) + \sum_{j=1}^{\bar{X}(B_{n+1})} \xi_j + (\xi - 1)\epsilon(1 - Q_n) + \xi_{n+1}, \quad (2.7.3)$$

其中,  $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$  为系统的输入批数过程, 其间隔时间序列  $\{J_k, k \geq 1\}$  为 i.i.d 随机变量序列, 且  $J_i \sim \Gamma(r, \lambda)$ ,  $\xi_i$  表示第  $i$  批到达的顾客数, 诸  $\xi_i$  独立同分布, 均与  $\xi$  同分布.

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$\xi_{n+1}$  是第  $n+1$  个顾客数服务的反馈数, 即  $\xi_{n+1} \sim B(1, \sigma)$ . 由(2.6.5)

式  $\sum_{j=1}^{\bar{X}(B_{n+1})} \xi_j$  的 PGF 为

$$E\left[z \sum_{j=1}^{\bar{X}(B_{n+1})} \xi_j\right] = \frac{1 - g'}{1 - g'\xi(z)}. \quad (2.7.4)$$

再由随机变量的独立性, 得

$$Q_{n+1}(z) = E\left[z \sum_{j=1}^{\bar{X}(B_{n+1})} \xi_j\right] E(z^{\xi_{n+1}}) E[z^{Q_n - \epsilon(Q_n) + (\xi - 1)\epsilon(1 - Q_n)}]$$

$$= \frac{1 - g^r}{1 - g^r \xi(z)} (\sigma + \bar{\sigma}z) \left[ \frac{\xi(z) - 1}{z} P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z} Q_n(z) \right].$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 记  $Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z)$ ,  $P\{Q = 0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = 0\}$ , 因为  $\rho < 1$ , 所以有

$$Q(z) = \frac{(1 - g^r)(\sigma + \bar{\sigma}z)}{1 - g^r \xi(z)} \left[ \frac{\xi(z) - 1}{z} P\{Q = 0\} + \frac{1}{z} Q(z) \right],$$

即

$$Q(z) = \frac{(1 - g^r)(\sigma + \bar{\sigma}z)[\xi(z) - 1]P\{Q = 0\}}{z - zg^r\xi(z) - (1 - g^r)(\sigma + \bar{\sigma}z)}. \quad (2.7.5)$$

令  $z = 1$ , 得

$$P\{Q = 0\} = \frac{1 - g^r - dg^r - \bar{\sigma}(1 - g^r)}{d(1 - g^r)}. \quad (2.7.6)$$

将(2.7.6)代入(2.7.5)立得(2.7.1). 由(2.7.1)可得(2.7.2).

### 2.7.2 忙期的分布

设  $\theta$  为一个顾客引出的忙期,  $M$  为在一个忙期  $\theta$  中服务完且离开系统的顾客数.  $\Theta$  为一批顾客 ( $\xi$  个顾客) 引出的忙期,  $\Sigma$  为在一个  $\Theta$  中服务完且离开系统的顾客数.

**定理 2.7.2** 在上述条件下, 有

$$\theta^*(s) = \frac{\sigma\mu(1 - x^r)x}{\lambda(1 - x)[1 - x^r\xi(\theta^*(s))]}, \quad (2.7.7)$$

$$E(\theta) = \frac{d(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - \lambda^r d}{\sigma\mu[d(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - d\lambda^r - \lambda^r]}, \quad \rho < 1, \quad (2.7.8)$$

$$M(z) = \frac{z[(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - \lambda^r]}{(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - \lambda^r\xi[M(z)]}, \quad (2.7.9)$$

$$E(M) = \frac{d(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - d\lambda^r}{d(\bar{\sigma}\mu + \lambda)^r - d\lambda^r - \lambda^r}, \quad \rho < 1, \quad (2.7.10)$$

其中

$$x = \frac{\lambda}{\sigma\mu + \lambda + s}.$$

**证** 因为忙期与顺序无关, 记

$$U = \sum_{i=1}^{\eta} B_i, \Theta = \sum_{i=1}^{\xi} \theta_i, \Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i,$$

则有

$$\theta = U + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{\bar{X}(U)}, \quad (2.7.11)$$

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{\bar{X}(U)}, \quad (2.7.12)$$

其中  $\{\theta_i, i \geq 1\}, \{M_i, i \geq 1\}, \{\Theta_i, i \geq 1\}, \{\Sigma_i, i \geq 1\}$  均为独立同分布随机变量序列, 且  $\theta_1$  与  $\theta$  同分布,  $M_1$  与  $M$  同分布,  $\Theta_1$  与  $\Theta$  同分布,  $\Sigma_1$  与  $\Sigma$  同分布. 由 (2.7.11) 得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= E\{e^{-s[U+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{\bar{X}(U)}]}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E\{e^{-s[A+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{\bar{X}(A)}]}\} P\{\eta = n\}, \quad (2.7.13) \end{aligned}$$

其中  $A = \sum_{i=1}^n B_i \sim \Gamma(n, u)$ . 又因

$$\begin{aligned} &E\{e^{-s[A+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{\bar{X}(A)}]}\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} E\{e^{-s[\theta_1+\cdots+\theta_{\bar{X}(t)}]}\} \frac{\mu^n t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j \mu^n t^{n-1}}{j!(n-1)!} e^{-\mu t} dt, \end{aligned}$$

将上式代入 (2.7.13), 得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sigma \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\sigma \mu \lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\lambda + \mu \sigma + s)t} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\sigma \mu \lambda^j}{j!} \cdot \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda + \sigma \mu + s)^{j+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \frac{\sigma \mu}{\lambda + \sigma \mu + s} \cdot \frac{x^{mr}(1-x^r)}{1-x} \\ &= \frac{\sigma \mu x(1-x^r)}{\lambda(1-x)[1-\Theta^*(s)x^r]} \\ &= \frac{\sigma \mu x(1-x^r)}{\lambda(1-x)\{1-x^r \xi[\Theta^*(s)]\}}. \end{aligned}$$

于是 (2.7.7) 得证. 由 (2.7.7) 可得 (2.7.8) 或更简单地由 (2.7.11) 得

$$E(\theta) = \frac{1}{\sigma\mu} + \frac{E(\theta)}{d} E[\bar{X}(u)]. \quad (2.7.14)$$

又因

$$\begin{aligned} E[\bar{X}(U)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[\bar{X}(\sum_{i=1}^n B_i)] \sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} E[\bar{X}(t)] \frac{e^{-\mu t} \mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\ &= \sigma \mu \int_0^{\infty} E(\bar{X}(t)) e^{-\sigma \mu t} dt \\ &= \sigma \mu \int_0^{\infty} e^{-\sigma \mu t} \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dt \\ &= \sigma \mu \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\lambda + \sigma \mu)t} dt \\ &= \sigma \mu \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\lambda^j}{(\lambda + \sigma \mu)^{j+1}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \sigma \mu} \right)^r \right] \left( \frac{\lambda}{\lambda + \sigma \mu} \right)^{mr} \\ &= \frac{\lambda^r}{(\sigma \mu + \lambda)^r - \lambda^r}, \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

将 (2.7.15) 代入 (2.7.14) 立得 (2.7.8). 由 (2.7.12) 得

$$\begin{aligned} M(z) = E(z^M) &= ZE[z^{\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{(U)}^{\bar{X}}}] \\ &= Z \sum_{n=1}^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{(A)}^{\bar{X}}}] \sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\ &= Z \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{(i)}^{\bar{X}}}] \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\quad \cdot e^{-\mu t} dt \sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\ &= Z \int_0^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{(i)}^{\bar{X}}}] \sigma \mu e^{-\sigma \mu t} dt \\ &= Z \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum(z) \right]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sigma \mu e^{-\sigma \mu t} dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= Z \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum (z) \right]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\sigma \mu \lambda^j}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda + \sigma \mu)^{j+1}} \\
&= Z \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum (z) \right]^m \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \sigma \mu} \right)^r \right] \left( \frac{\lambda}{\lambda + \sigma \mu} \right)^{mr} \\
&= \frac{z [(\sigma \mu + \lambda)^r - \lambda^r]}{(\sigma \mu + \lambda)^r - \lambda^r \xi(M(z))}.
\end{aligned}$$

于是 (2.7.9) 得证. 由 (2.7.12) 可得 (2.7.10).

### 2.7.3 逗留时间的分布

**定理 2.7.3** 设  $S$  表示一个顾客的总的逗留时间,  $S_j$  表示一个顾客的第  $j$  次逗留时间,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , 则

$$\begin{aligned}
S^*(s) = \frac{\sigma}{1 - \bar{\sigma} S_2^*(s)} \cdot \left\{ \frac{[1 - g^r - dg^r - \bar{\sigma}(1 - g^r)]\mu}{(1 - g^r)(\mu + s)} \right. \\
\left. + \frac{[dg^r + \bar{\sigma}(1 - g^r)]S_2^*(s)}{1 - g^r} \right\}, \quad (2.7.16)
\end{aligned}$$

其中  $S_2^*(s)$  由下式确定:

$$Q(z) = \int_0^{\infty} e^{-(\bar{\sigma}\mu - \bar{\sigma}\mu z)t} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi(z)]^n P\{\bar{X}(t) = n\} dP\{s_2 \leq t\}. \quad (2.7.17)$$

而  $Q(z)$  由 (2.7.1) 给出.

**证** 某顾客的逗留时间序列  $\{S_j, j \geq 1\}$  显然是相互独立随机变量序列, 且  $S_2, S_3, S_4, \dots$  同分布. 如果该顾客到达时系统不空, 则  $S_1$  与  $S_2$  同分布; 如果该顾客到达时系统是空的, 则  $S_1 = B$ . 由 (2.6.35) 知, 在任意时刻系统的队长的 PGF 为

$$L(z) = \frac{(1 - z)dQ(z)}{1 - \xi(z)}, \quad (2.7.18)$$

其中,  $Q(z)$  由 (2.7.1) 给出. 所以, 在任意时刻系统空的概率由 (2.7.18) 和 (2.7.6) 得

$$L(0) = dQ(0) = \frac{1 - g^r - dg^r - \bar{\sigma}(1 - g^r)}{1 - g^r}. \quad (2.7.19)$$

从而,  $S_1$  的 LST 为

$$S_1^*(s) = E(e^{-ss_1}) = \frac{\mu[1 - g^r - dg^r - \bar{\sigma}(1 - g^r)]}{(\mu + s)(1 - g^r)} + \frac{[dg^r + \bar{\sigma}(1 - g^r)]S_2^*(s)}{1 - g^r}. \quad (2.7.20)$$

又因  $S = \sum_{j=1}^q S_j$ , 故  $S$  的 LST 为

$$\begin{aligned} S^*(s) &= E(e^{-ss_1})E[e^{-s(s_2+s_3+\cdots+s_q)}] \\ &= E(e^{-ss_1}) \frac{\sigma}{1 - \sigma S_2^*(s)}. \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

又因

$$Q = \sum_{j=1}^{\bar{X}(s_2)} \xi_j + f(s_2), \quad (2.7.22)$$

其中,  $f(s_2)$  为当系统不空时在  $S_2$  中反馈的顾客数. 故

$$\begin{aligned} Q(z) &= \int_0^\infty E\left[Z \sum_{j=1}^{\bar{X}(t)} \xi_j + f(t)\right] dP\{S_2 \leq t\} \\ &= \int_0^\infty E\left[Z \sum_{j=1}^{\bar{X}(t)} \xi_j\right] E[Z^{f(t)}] dP\{S_2 \leq t\}, \quad [\because f(t) \sim P(\bar{\sigma}ut)] \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty [\xi(z)]^n P\{\bar{X}(t) = n\} e^{-(1-z)\bar{\sigma}\mu t} dP\{S_2 \leq t\}. \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

由 (2.7.23), (2.7.22) 与 (2.7.21) 定理 2.7.3 得证.

## § 2.8 $M/M/\cdot$ 系统的忙期

在 § 2.3 中, 我们给出了  $M/M/\cdot$  系统的平均忙期, 现在我们来讨论其忙期的分布. 为此, 先再一次强调几个概念. 从系统由空变为不空时起一直到系统又变为空时止这段时间称为系统的忙期, 记为  $\theta$ . 从系统中有  $k$  个顾客时起一直到系统中没有顾客 (空) 时止这段时间称为系统的  $k$  阶忙期, 记为  $W_k$ . 从系统中有  $k$  个顾客在等待服务 (不包含正在服务的顾客) 时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间称为系统的  $k$  阶繁忙期, 记为  $A_k$ . 零阶

繁忙期  $A_0$  简称为繁忙期,它是从系统中所有服务台都进入服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间. 显然,对于系统  $M/M/1$  有

$$W_1 = A_0 = \theta, A_k = W_{k+1} = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{k+1}, \quad (2.8.1)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{k+1}$  为独立同分布随机变量,且均与  $\theta$  同分布.

### 2.8.1 几个引理

**引理 2.8.1** 对于  $M/M/n$  系统,当  $n\mu > \lambda$  时,有

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}, \quad (2.8.2)$$

$$E(A_0) = \frac{1}{n\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{\lambda + n\mu}{(n\mu - \lambda)^3}, \quad (2.8.3)$$

$$A_k^*(s) = [A_0^*(s)]^{k+1}, \quad (2.8.4)$$

$$E(A_k) = \frac{k+1}{n\mu - \lambda}, D(A_k) = \frac{(k+1)(\lambda + n\mu)}{(n\mu - \lambda)^3}. \quad (2.8.5)$$

证明见定理 2.3.4 和定理 2.3.5.

**引理 2.8.2** 对于  $M/M/n/n$  系统有

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + s}, \quad E(A_0) = \frac{1}{n\mu}, \quad D(A_0) = \frac{1}{n^2 \mu^2}. \quad (2.8.6)$$

**证** 由  $A_0 = \min(B_1, B_2, \cdots, B_n)$   $\sim \Gamma(1, n\mu)$  可立得(2.8.6).

**引理 2.8.3** 设  $A_{N0}$  为  $M/M/n/N$  ( $n \leq N$ ) 系统的繁忙期,则  $A_{N0}$  的 LST 为

$$A_{N0}^*(s) = \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu} \left[ 1 + \frac{\lambda A_{N0}^*(s)}{s + \lambda + n\mu} + \frac{\lambda^2 A_{N0}^*(s) A_{N-1,0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)^2} \right. \\ \left. + \cdots + \frac{\lambda^{N-n-1} \prod_{i=n+1}^N A_{i0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)^{N-n-1}} \right] \\ + \frac{n\mu \lambda^{N-n} \prod_{i=n+1}^N A_{i0}^*(s)}{(s + n\mu)(s + \lambda + n\mu)^{N-n}}, \quad (2.8.7)$$

其中  $A_{i0}$  为  $M/M/n/i$  ( $n \leq i$ ) 系统的繁忙期,  $i = n, n+1, \cdots, N$ .

**证** 因为忙期与服务顺序无关,以及指数分布随机变量的无

记忆性. 当  $n$  个服务台都进入服务时起, 经过服务时间  $\beta$  后系统有一个顾客被服务完离开系统, 而在  $\beta$  中可能且最多只可能有  $N-n$  个顾客进入系统,  $\beta = A_0$ , 这时空闲的服务台先对第  $N-n$  个进入的顾客服务以及对在其服务期间到达 (产生) 的所有顾客 (所有后代) 服务. 记其所花时间为  $A_{0,N-n}$ . 然后再为第  $N-n-1$  个进入顾客以及由他所产生的所有后代服务, 当他及其后代都服务完时 (记所花时间为  $A_{0,N-n-1}$ ), 再为第  $N-n-2$  个顾客及其所有后代服务, 以此类推最后为第一个进入的顾客及其后代服务, 记其所花时间为  $A_{01}$ , 设  $\{Y(t), t \geq 0\}$  为输入过程. 由于这时到达间隔时间序列  $\{J_i, i \geq 1\}$  是 i.i.d 随机变量序列, 且  $J_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$ , 所以  $\{Y(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda$  的泊松过程, 再设  $\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} A_{00} \equiv 0$ , 则有

$$A_{N0} = \beta + \sum_{i=0}^{Y(\beta)} A_{0,i\epsilon}[(N-n-Y(\beta))]. \quad (2.8.8)$$

易见,  $\beta, A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0,N-n}$  与  $\{Y(t), t \geq 0\}$  相互独立. 且  $A_{0i}$  与  $A_{N-i+1,0}$  同分布, 即  $A_{0,N-n}$  与  $A_{N+1,0}$  同分布,  $\dots, A_{01}$  与  $A_{N0}$  同分布, 所以

$$\begin{aligned} A_{N0}^*(s) &= E(e^{-sA_{N0}}) = E(e^{-s[\beta + \sum_{i=0}^{Y(\beta)} A_{0,i\epsilon}[(N-n+1-Y(\beta))]]) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} E\left\{e^{-s \sum_{i=0}^{Y(t)} A_{0,i\epsilon}[(N-n+1-Y(\beta))]} \mid n\mu e^{-n\mu t} dt\right. \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^\infty E\left\{e^{-s \sum_{i=0}^k A_{0,i\epsilon}[(N-n+1-k)]} \mid e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} n\mu e^{-n\mu t} dt\right. \\ &= \sum_{k=0}^\infty \prod_{i=0}^k A_{0,i\epsilon(N-n+1-k)}^*(s) \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{k!} t^k e^{-(\lambda+n\mu+s)t} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \prod_{i=0}^k A_{0,i\epsilon(N-n+1-k)}^*(s) \frac{n\mu \lambda^k}{(s+\lambda+n\mu)^{k+1}} \quad (\because A_{00}^*(s) = 1) \\ &= \frac{n\mu}{s+\lambda+n\mu} + \frac{\lambda n\mu A_{01}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^2} + \frac{\lambda^2 n\mu A_{01}^*(s) A_{02}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^3} + \dots \\ &\quad + \frac{\lambda^{N-n-1} n\mu A_{01}^*(s) A_{02}^*(s) \cdots A_{0,N-n-1}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^{N-n}} \\ &\quad + \frac{\lambda^{N-n} n\mu A_{01}^*(s) A_{02}^*(s) \cdots A_{0,N-n}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^{N-n}(s+n\mu)}. \end{aligned}$$

再考虑到  $A_{0i}^*(s) = A_{N-i+1,0}^*(s)$ , 可立得 (2.8.7). 由 (2.8.7) 得

$$A_{n+j,0}^*(s) = \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\lambda^m \prod_{i=1}^m A_{n+j-i+1,0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)^m} \\ + \frac{\lambda^j n\mu \prod_{i=1}^j A_{n+j-i+1,0}^*(s)}{(s + n\mu)(s + \lambda + n\mu)^j}, \quad (2.8.9) \\ j = 0, 1, 2, \dots, N - n.$$

特别

$$A_{n0}^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + s}, \quad (2.8.10)$$

$$A_{n+1,0}^*(s) = \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu} + \frac{\lambda n\mu A_{n+1,0}^*(s)}{(s + n\mu)(s + \lambda + n\mu)} \\ = \frac{n\mu(s + n\mu)}{(s + n\mu)^2 + \lambda s}, \quad (2.8.11)$$

$$A_{n+2,0}^*(s) = \frac{n\mu}{(s + \lambda + n\mu)} \left[ 1 + \frac{\lambda A_{n+2,0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)} \right] \\ + \frac{n\mu \lambda^2 A_{n+2,0}^*(s) A_{n+1,0}^*(s)}{(s + n\mu)(s + \lambda + n\mu)^2}, \quad (2.8.12)$$

由上两式可解得  $A_{n+2,0}^*(s)$ . 一般地, 由 (2.8.9) 递推可解得

$$A_{n+1,0}^*(s), A_{n+2,0}^*(s), \dots, A_{N0}^*(s).$$

## 2.8.2 $M/M/\cdot$ 系统的 $k$ 阶忙期

**定理 2.8.1** 对于  $M/M/\cdot$  系统有

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{\mu_j}{\lambda_j} [W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda_j} W_j^*(s), & j \geq 1, \\ W_0^*(s) = 1, \end{cases} \quad (2.8.13)$$

其中,  $W_j^*(s)$  为  $W_j$  的 LST,  $\mu_i$  由 (2.3.2) 给出,  $\lambda_i$  为系统的状态过程 (生灭过程) 的生率, 是状态 (系统中顾客数)  $i$  的函数.

证 设  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  如引理 2.3.1 所设, 则  $\alpha_j \sim \Gamma(1, \lambda_j)$ ,  $\beta_j \sim \Gamma(1, \mu_j)$ , 且  $\alpha_j$  与  $\beta_j$  相互独立.

因为从系统转移到状态  $j$  时起, 经过时间  $\min(\alpha_j, \beta_j)$  后系统的状态依概率为 1 要发生变化, 或者由  $j$  变为  $j-1$ , 或者由  $j$  变为  $j+1$ . 再由指数分布的性质和全期望公式以及经过  $\min(\alpha_j, \beta_j)$  后,  $W_{j+1}, W_{j-1}$  均与  $\min(\alpha_j, \beta_j)$  无关, 得

$$\begin{aligned} W_j^*(s) &= E(e^{-sW_j}) \\ &= E[e^{-s\min(\alpha_j, \beta_j)}](E[e^{sW_j} | \alpha_j < \beta_j]P\{\alpha_j < \beta_j\} \\ &\quad + E[e^{sW_j} | \alpha_j > \beta_j]P\{\alpha_j > \beta_j\}) \\ &= \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + \mu_j + s} \left[ W_{j+1}^*(s) \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} + W_{j-1}^*(s) \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \right]. \end{aligned}$$

由此, 立得 (2.8.13).

如果能由 (2.8.13) 解出  $W_j^*(s)$ , 就可得到  $M/M/\cdot$  系统  $k$  阶忙期的分布. 然而要求出变系数二阶差分方程 (2.8.13) 的解析解不是一件容易的事情.

**定理 2.8.2** 设  $g_j = E(W_j^2)$ ,  $\omega_j = E(W_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , 则当  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ ,  $\sup_{i \geq 0} \{\lambda_i\}$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i < \infty$  时, 有

$$g_1 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i, \quad (2.8.14)$$

$$g_j = g_1 + g_1 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2\lambda_i \rho_i} - 2 \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad (2.8.15)$$

其中

$$\rho_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad \rho_j = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}, \quad j \geq 2.$$

**证** 对 (2.8.13) 式两边关于  $s$  求一、二阶导数后, 再令  $s = 0$  得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = \frac{\mu_j}{\lambda_j} (\omega_j - \omega_{j-1}) - \frac{1}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad \omega_0 = 0, \quad (2.8.16)$$

$$g_{j+1} - g_j = \frac{\mu_j}{\lambda_j} (g_j - g_{j-1}) - \frac{2\omega_j}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad g_0 = 0, \quad (2.8.17)$$

(2.8.16) 与引理 2.3.2 中 (\*) 相同. 由 (2.8.17) 递推得

$$g_{j+1} - g_j = -2 \sum_{i=1}^j \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^j \frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{g_1}{\lambda_j \rho_j}. \quad (2.8.18)$$

记

$$h_n = g_{n+1} - g_n, \quad n \geq 0, \quad v_n = \frac{h_n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1, \quad v_0 = h_0 = g_1,$$

有

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n v_n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = h_n = -\frac{2\omega_n}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n} h_{n-1} = -2 \frac{\omega_n}{\lambda_n} + \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n v_{n-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}.$$

所以,有

$$v_n - v_{n-1} = -\frac{2\omega_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < 0, \quad n \geq 1.$$

从而  $v_{n-1} - v_n \geq 0, n \geq 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  存在. 又因

$$v_0 - v_1 = 2\omega_1 \rho_1, \cdots, v_{n-1} - v_n = 2\omega_n \rho_n,$$

所以

$$v_0 - v_n = 2 \sum_{i=1}^n \omega_i \rho_i.$$

$$g_1 = v_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i$$

又因

$$v_n = \lambda_n h_n \rho_n, \quad \sup_{n \geq 0} |\lambda_n| < \infty,$$

以及  $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i < \infty, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n \rho_n = 0$ , 又  $M/M/\cdot$  系统是遍历不可

约马氏链, 故对任意  $n$  有

$$0 \leq g_n < \infty, \quad g_{n+1} = \sum_{i=1}^n h_i,$$

故  $\sup_{i \geq 1} |h_i| < \infty$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , 故

$$g_1 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i, \quad (2.8.19)$$

即

$$g_1 = E(\theta^2) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i.$$

从而,由 (2.8.19) 式得

$$\begin{aligned} g_{j+1} - g_j &= -2 \sum_{i=1}^j \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^j \frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_j \rho_j} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i g_i \\ g_{j+1} &= g_j + \frac{1}{\lambda_j \rho_j} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i - 2 \sum_{i=1}^j \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^j \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \end{aligned} \quad (2.8.20)$$

即

$$\begin{aligned} g_j &= g_{j-1} - 2 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_{j-1} \rho_{j-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i g_i \\ &= g_1 + g_1 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2 \lambda_i \rho_i} - 2 \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^{m-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

### 2.8.3 M/M/n 系统的忙期分布

这时  $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots, \mu_j = \begin{cases} n\mu, & j \geq n, \\ j\mu, & j < n. \end{cases}$

由 (2.8.13) 并注意到  $W_n = W_{n-1} + A_0$ , 且  $W_{n-1}$  与  $A_0$  独立, 得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{\lambda} [W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda} W_j^*(s), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s) A_0^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \\ A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}. \end{cases} \quad (2.8.22)$$

由 (2.8.22) 可解得  $W_1^*(s) [= \theta^*(s)], W_2^*(s), \dots, W_n^*(s)$ .

(i) 对于 M/M/2 系统, 由 (2.8.22) 得

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda} [1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda} W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s) A_0^*(s), \\ A_0^*(s) = \frac{2\mu}{2\mu + s + \lambda + \lambda A_0^*(s)}. \end{cases} \quad (2.8.23)$$

解之, 得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s - \lambda A_0^*(s)}, \quad (2.8.24)$$



$$W_2^*(s) = \frac{\mu A_0^*(s)}{\lambda + \mu + s - \lambda A_0^*(s)}. \quad (2.8.25)$$

由 (2.8.23) 的第三式, 得

$$E(A_0) = \frac{1}{2\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{2\mu + \lambda}{(2\mu - \lambda)^3}, 2\mu > \lambda, \quad (2.8.26)$$

由 (2.8.24) 与 (2.8.26) 得

$$E(\theta) = \frac{2}{2\mu - \lambda}, D(\theta) = \frac{4(\mu + \lambda)}{(2\mu - \lambda)^2(\mu - \lambda)}, 2\mu > \lambda, \quad (2.8.27)$$

$$E(W_2) = \frac{3}{2\mu - \lambda}, D(W_2) = \frac{10\mu + \lambda}{(2\mu - \lambda)^3}, 2\mu > \lambda. \quad (2.8.28)$$

(ii) 对于系统  $M/M/3$ , 由 (2.8.22) 得

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_3^*(s) = \frac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^* A_0^*(s), \end{cases} \quad (2.8.29)$$

其中

$$A_0^*(s) = \frac{3\mu}{3\mu + s + \lambda - \lambda A_0^*(s)}. \quad (2.8.30)$$

由 (2.8.29), 得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu[\lambda + 2\mu + s - \lambda A_0^*(s)]}{(\lambda + \mu + s)[\lambda + 2\mu + s - \lambda A_0^*(s)] - 2\lambda\mu}. \quad (2.8.31)$$

由 (2.8.30) 或 (2.3.32) 得

$$E(A_0) = \frac{1}{3\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{3\mu + \lambda}{(3\mu - \lambda)^3}, 3\mu > \lambda, \quad (2.8.32)$$

由 (2.8.31) 与 (2.8.32) 得

$$E(\theta) = \frac{6\mu + \lambda}{2\mu(3\mu - \lambda)}, 3\mu > \lambda. \quad (2.8.33)$$

由 (2.8.29) ~ (2.8.31) 可求出  $W_2^*(s)$  与  $W_3^*(s)$ .

#### 2.8.4 $M/M/n/n$ 系统忙期的分布

这时,  $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$ , 当  $j \geq n$  时  $\lambda_j = 0$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j < n, \\ n\mu, & j = n. \end{cases}$$

由 (2.8.13) 得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{\lambda} [W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda} W_j^*(s), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s) A_0^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \end{cases} \quad (2.8.34)$$

其中

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + s}. \quad (2.8.35)$$

由 (2.8.34) 与 (2.8.35) 可求  $\theta^*(s) = W_1^*(s), W_2^*(s), \dots, W_n^*(s)$ .

(i) 对于  $M/M/2/2$  系统. 这时 (2.8.34) 与 (2.8.35) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) \frac{2\mu}{2\mu + s} = \frac{\mu}{\lambda} [1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda} W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s) \frac{2\mu}{2\mu + s}, \end{cases} \quad (2.8.36)$$

解之, 得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{2\mu^2 + \mu s}{s^2 + (3\mu + \lambda)s + 2\mu^2}, \quad (2.8.37)$$

$$W_2^*(s) = \frac{2\mu(2\mu^2 + \mu s)}{(2\mu + s)[s^2 + (3\mu + \lambda)s + 2\mu^2]}, \quad (2.8.38)$$

由 (2.8.37) 得

$$E(\theta) = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu^2}, D(\theta) = \frac{4\mu^2 + 5\lambda\mu^2 + \lambda^2 - 2\mu^3 - \lambda\mu^2}{2\mu^4}, \quad (2.8.39)$$

由 (2.8.38) 得

$$E(W_2) = \frac{3\mu + \lambda}{2\mu^2}, D(W_2) = \frac{8\mu^2 + \lambda^2 + 7\lambda\mu}{4\mu^4}. \quad (2.8.40)$$

(ii) 对于  $M/M/3/3$  系统, 这时 (2.8.34) 与 (2.8.35) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_3^*(s) \frac{3\mu}{3\mu + s} = \frac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^*(s) \frac{3\mu}{3\mu + s}. \end{cases} \quad (2.8.41)$$

解之, 得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= W_1^*(s) \\ &= \frac{\mu[s^2 + (\lambda + 5\mu)s + 6\mu^2]}{(\lambda + \mu + s)[s^2 + (\lambda + 5\mu)s + 6\mu^2] - (6\lambda\mu^2 + 2\lambda\mu s)}, \end{aligned} \quad (2.8.42)$$

且

$$E(\theta) = \frac{6\mu^2 + 3\lambda\mu + \lambda^2}{6\mu^3}, \quad (2.8.42')$$

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \frac{1}{36\mu^6}(36\mu^4 + 68\lambda\mu^3 + 49\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^3\mu \\ &\quad + \lambda^4 - 36\lambda^2\mu^3 - 16\lambda^3\mu^2 - 4\lambda^4\mu - 24\lambda\mu^4). \end{aligned} \quad (2.8.43)$$

由 (2.8.41) 还可求出  $W_2^*(s)$  与  $W_3^*(s)$ .

### 2.8.5 $M/M/n/N$ ( $n \leq N$ ) 系统的忙期分布

$$\text{这时 } \lambda_j = \begin{cases} \lambda, & j=0,1,\dots,N-1 \\ 0, & j \geq N, \end{cases} \quad \mu_j = \begin{cases} j\mu, & j=1,2,\dots,n-1, \\ n\mu, & j=n,n+1,\dots,N, \end{cases}$$

由 (2.8.13) 和引理 2.8.3, 得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_j^*(s), & j=1,2,\dots,n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s)A_{N0}^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \end{cases} \quad (2.8.44)$$

其中  $A_{N0}^*(s)$  由 (2.8.7) 给出. 由 (2.8.44) 可解出  $\theta^*(s) = W_1^*(s)$ ,  $W_2^*(s), \dots, W_n^*(s)$ .

(i) 对于  $M/M/1/2$  系统, 这时, (2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s) \frac{\mu}{\mu + s}. \end{cases} \quad (2.8.45)$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu + s)}{(\mu + s)^2 + \lambda s}, \quad (2.8.46)$$

$$W_2^*(s) = \frac{\mu^2}{(\mu + s)^2 + \lambda s}, \quad (2.8.47)$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu + \lambda}{\mu^2}, \quad D(\theta) = \frac{\lambda^2 + 4\lambda\mu + \mu^2}{\mu^4}, \quad (2.8.48)$$

$$E(W_2) = \frac{2\mu + \lambda}{\mu^2}, \quad D(W_2) = \frac{2\mu^2 + 4\lambda\mu + \lambda^2}{\mu^4}. \quad (2.8.49)$$

(ii) 对于  $M/M/1/3$  系统,这时 (2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_2^*(s) \frac{\mu}{\mu + s} = \frac{\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s). \end{cases} \quad (2.8.50)$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu + s)^2 + \lambda\mu s}{(\lambda + \mu + s)[(\mu + s)^2 + \lambda s] - \lambda\mu(\mu + s)}, \quad (2.8.51)$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}{\mu^3}, \quad (2.8.52)$$

(iii) 对于  $M/M/2/3$  系统,这时 (2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s) \frac{2\mu(2\mu + s)}{(2\mu + s)^2 + \lambda s}. \end{cases} \quad (2.8.53)$$

解之,得

$$\begin{aligned}\theta^*(s) &= W_1^*(s) \\ &= \frac{\mu[(2\mu + s)^2 + \lambda s]}{(\lambda + \mu + s)[(2\mu + s)^2 + \lambda s] - 2\lambda\mu(2\mu + s)},\end{aligned}\quad (2.8.54)$$

$$E(\theta) = \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 4\mu^2}{4\mu^3}, \quad (2.8.55)$$

### 2.8.6 $M/M/n/m/m$ ( $n \leq m$ ) 系统的忙期分布

这时

$$\lambda_j = (m - j)\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ n\mu, & j = n, n+1, \dots, m \end{cases}$$

由 (2.8.13) 得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{(m-j)\lambda} [W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] \\ \quad - \frac{s}{(m-j)\lambda} W_j^*(s), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{n\mu}{(m-j)\lambda} [W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] \\ \quad - \frac{s}{(m-j)\lambda} W_j^*(s), \quad j = n, n+1, \dots, m-1, \\ W_m^*(s) = W_{m-1}^*(s) \frac{n\mu}{n\mu + s}, \\ W_0^*(s) = 1. \end{cases} \quad (2.8.56)$$

由 (2.8.56) 可求  $\theta^*(s) = W_1^*(s), W_2^*(s), \dots, W_m^*(s)$ .

(i) 对于  $M/M/1/2/2$  系统, 这时, (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda} [1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda} W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s) \frac{\mu}{\mu + s}. \end{cases} \quad (2.8.57)$$

解之, 得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu + s)}{(\lambda + \mu + s)(\mu + s) - \lambda\mu}, \quad (2.8.58)$$

$$E(\theta) = \frac{\lambda + \mu}{\mu^2}.$$

(ii) 对于  $M/M/1/3/3$  系统, 这时 (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{2\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{2\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_3^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^*(s) \frac{\mu}{\mu + s}. \end{cases} \quad (2.8.59)$$

解之, 得

$$\theta^*(s) = \frac{\mu[(\mu + s)^2 + \lambda s]}{(2\lambda + \mu + s)[(\mu + s)^2 + \lambda s] - 2\lambda\mu(\mu + s)}, \quad (2.8.60)$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2}{\mu^3}. \quad (2.8.61)$$

(iii) 对于  $M/M/2/3/3$  系统, 这时 (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{2\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{2\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_2^*(s) \frac{2\mu}{2\mu + s} = \frac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s). \end{cases} \quad (2.8.62)$$

解之, 得

$$\theta^*(s) = \frac{\mu[(2\mu + s)^2 + \lambda s]}{(2\lambda + \mu + s)[(2\mu + s)^2 + \lambda s] - 4\lambda\mu(2\mu + s)}, \quad (2.8.63)$$

且

$$E(\theta) = \frac{2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2}{2\mu^3}. \quad (2.8.64)$$

### 第三章 $M/G/1$ 系统

该系统的基本假设是:

(1) 顾客到达间隔时间序列  $\{J_n, n \geq 1\}$  是 i.i.d. 随机变量序列, 且  $J_n \sim \Gamma(1, \lambda), n \geq 1$ , 即系统的输入过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为参数(强度)是  $\lambda$  的泊松过程.

(2) 各个顾客的服务时间序列  $\{B_n, n \geq 1\}$  是 i.i.d. 随机变量序列, 且  $E(B_n) = \frac{1}{\mu}, D(B_n) = \sigma^2, E(B_n^3)$  存在有限,  $B_n$  与  $B$  同分布, 其分布函数记为  $B(t)$ .

(3) 服务机构只有一个服务台, 服务规则(如果不特别说明)为先来先服务(FCFS)等待制. 并设  $\{J_n, n \geq 1\}$  与  $\{B_n, n \geq 1\}$  相互独立.

#### § 3.1 统计平衡队长

##### 3.1.1 嵌入马尔可夫链

设  $Q_n$  为第  $n$  个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数(队长),  $Y_n$  为在第  $n$  个顾客服务时间  $B_n$  内到达系统的顾客数, 显然有  $Y_n = N(B_n)$ . 记

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

由基本假设知,  $Y_{n+1}$  与  $Q_n$  独立, 于是有

$$Q_{n+1} = Q_n - \varepsilon(Q_n) + Y_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (3.1.2)$$

**定理 3.1.1** 由(3.1.2)式确定的随机序列  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是齐次马尔可夫链.

**证** 因为对任意非负整数  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ , 有

$$\begin{aligned}
P\{Q_{n+1} = k_{n+1} | Q_n = k_n, Q_{n-1} = k_{n-1}, \dots, Q_1 = k_1\} \\
= P\{Q_n - \varepsilon(Q_n) + Y_{n+1} = k_{n+1} | Q_n = k_n, \\
Q_{n-1} = k_{n-1}, \dots, Q_1 = k_1\} \\
= P\{Y_{n+1} = k_{n+1} - k_n + \varepsilon(k_n)\} \\
= P\{Q_{n+1} = k_{n+1} | Q_n = k_n\},
\end{aligned}$$

所以  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是马尔可夫链. 又因  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  相互独立同分布, 设

$$p_k = P\{Y_1 = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.3)$$

则当  $i > j + 1$  时

$$p_{ij}(n, 1) \triangleq P\{Q_{n+1} = j | Q_n = i\} = P\{Y_{n+1} = j - i + 1\} = 0.$$

当  $i = 0$  时

$$p_{ij}(n, 1) = p\{Q_{n+1} = j | Q_n = i\} = p\{Y_{n+1} = j\} = p_j.$$

当  $0 < i \leq j + 1$  时

$$p_{ij}(n, 1) = p\{Y_{n+1} = j - i + 1\} = p_{j-i+1},$$

即

$$p_{ij} = \begin{cases} p_j, & i = 0, j \geq 0, \\ p_{j-i+1}, & 0 < i \leq j + 1, \\ 0, & i > j + 1, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

此示  $p_{ij}(n, 1)$  与  $n$  无关, 故  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是齐次马尔可夫链.

由 (3.1.4) 式,  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的一步转移概率矩阵由 (3.1.5) 式给出. 我们称  $\{Q_n, n \geq 1\}$  为  $M/G/1$  系统的嵌入马尔可夫链. 由于  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的任两状态都相通, 故该马尔可夫链是不可约的.

$$p = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (3.1.5)$$



又因  $p_{00} = p_0 > 0, p_{ii} = p_i > 0, i \geq 1$ , 所以  $\{Q_n, n \geq 1\}$  还是非周期的.

**定义 3.1.1** 如果对任意整数  $k \geq 0$ , 有  $\pi_k \geq 0$ , 且  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ , 则称数列  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  为概率分布. 如果概率分布  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  满足

$$\pi' = \pi' P, \quad (3.1.6)$$

其中  $\pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ ,  $P$  为状态空间是  $\{0, 1, 2, \dots\}$  的离散参数马尔可夫链的一步转移概率矩阵, 则称  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  为马尔可夫链的平稳分布.

上定义中的(3.1.6)式等价于下列方程组

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.7)$$

**定理 3.1.2**  $M/G/1$  系统的嵌入马尔可夫链  $\{Q_n, n \geq 1\}$  存在唯一平稳分布  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  的充要条件是  $\rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , 且这时

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = k\}, \quad k \geq 0. \quad (3.1.8)$$

**证** 由[2]中第三章 §1 定理 1 知,  $\{Q_n, n \geq 1\}$  为正常返的  $\Leftrightarrow \rho < 1$ , 再由[2]中第二章定理 2, 立证结论.

### 3.1.2 平均队长

现在来讨论  $M/G/1$  系统处于平衡状态后的平均队长. 当  $\rho < 1$  时, 对于嵌入马尔可夫链  $\{Q_n, n \geq 1\}$ , 由(3.1.2)得

$$E(Q_{n+1}) = E(Q_n) - E[\epsilon(Q_n)] + E(Y_{n+1}). \quad (3.1.9)$$

记  $E(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_n)$ , 因为,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_n)$ ,

$$E(Y_{n+1}) = E[N(B_{n+1})] = \int_0^{\infty} E[N(t)] dB(t) = \int_0^{\infty} \lambda t dB(t) = \rho, \quad (3.1.10)$$

$$E[\epsilon(Q_n)] = P\{Q_n > 0\} = 1 - P\{Q_n = 0\}. \quad (3.1.11)$$

在(3.1.9)中令  $n \rightarrow \infty$  得

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = 0\} = \rho,$$

即

$$\pi_0 = 1 - \rho. \quad (3.1.12)$$

将(3.1.2)式两边平方再取数学期望,并注意到 $[\varepsilon(Q_n)]^2 = \varepsilon(Q_n)$ ,  $Q_n \varepsilon(Q_n) = Q_n$ 且 $Y_{n+1}$ 与 $Q_n$ 独立,再令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$E(Q^2) = E(Q^2) + E[\varepsilon(Q)] + E(Y^2) - 2E(Q) - 2E(Y)E[\varepsilon(Q)] + 2E(Q)E(Y).$$

解上方程得

$$E(Q) = E[(Y^2) - 2\rho^2 + \rho] / (2 - 2\rho). \quad (3.1.13)$$

又因

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E[N^2(B)] = \int_0^\infty E[N^2(B) | B = t] dB(t) \\ &= \int_0^\infty E[N^2(t)] dB(t) = \int_0^\infty (\lambda^2 t^2 + \lambda t) dB(t) \\ &= \lambda^2 E(B^2) + \lambda E(B) = \lambda^2 \sigma^2 + \rho^2 + \rho, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

将(3.1.14)代入(3.1.13)得

$$E(Q) = \rho + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}, \quad \rho < 1, \quad (3.1.15)$$

再由利特尔公式得平均逗留时间  $E(T)$ :

$$E(T) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \quad (3.1.16)$$

因此平均等待时间  $E(W)$  为

$$E(W) = E(T) - E(B) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{\lambda E(B^2)}{2(1 - \rho)}. \quad (3.1.17)$$

再由利特尔公式,可得平均排队长  $E(Q_q)$

$$E(Q_q) = \lambda E(W) = \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1 - \rho)} = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \quad (3.1.18)$$

由(3.1.12)知,服务台被占用的概率,也即顾客到达需要等待的概率为

$$P\{Q > 0\} = \rho. \quad (3.1.19)$$

从而顾客到达不需要等待的概率为  $1 - \rho$ .

特别

(1) 对于  $M/D/1$  系统, 因为服务时间为定长  $\frac{1}{\mu}$ , 所以  $\sigma^2 = 0$ . 从而得

$$\begin{aligned} E(Q) &= \frac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)}, E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)\lambda}, \\ E(W) &= \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)}, E(Q_q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho < 1. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

(2) 对于  $M/M/1$  系统, 因为  $E(B) = \frac{1}{\mu}$ ,  $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ , 所以

$$E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho}, E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}, E(W) = \frac{\rho}{\mu - \lambda}, E(Q_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \rho < 1. \quad (3.1.21)$$

### 3.1.3 队长的分布

现讨论系统处于平衡后队长的分布. 设  $Q_{n+1}$  的 PGF 为  $Q_{n+1}(z)$ ,  $B^*(s)$  为  $B$  的 LST, 则由 (3.1.2) 式得

$$Q_{n+1}(z) = E(z^{Q_{n+1}}) = E[z^{Q_n - \epsilon(Q_n)}] E(z^{Y_{n+1}}). \quad (3.1.22)$$

因为

$$\begin{aligned} E(z^{Y_{n+1}}) &= E[z^{N(B_{n+1})}] = \int_0^\infty E[z^{N(t)}] dB(t) \\ &= B^*(\lambda - \lambda z), \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

$$\begin{aligned} E[z^{Q_n - \epsilon(Q_n)}] &= P\{Q_n = 0\} + \sum_{k=1}^\infty z^{k-1} P\{Q_n = k\} \\ &= P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z} [Q_n(z) - P\{Q_n = 0\}], \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

将 (3.1.23) 与 (3.1.24) 代入 (3.1.22), 再令  $n \rightarrow \infty$  (记  $Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z)$ ) 得

$$Q(z) = B^*(\lambda - \lambda z) \left[ 1 - \rho + \frac{Q(z) - (1 - \rho)}{z} \right]. \quad (3.1.25)$$

解出  $Q(z)$  得

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z}, \quad \rho < 1. \quad (3.1.26)$$

由于  $B^{*'}(0) = -E(B)$ ,  $B^{*''}(0) = E(B^2)$ ,  $Q''(1) + Q'(1) = E(Q^2)$ ,  $Q'(1) = E(Q)$  利用洛毕达法则可得

$$D(Q) = \frac{\lambda^4[E(B^2)]^2}{4(1-\rho)^2} + \frac{\lambda^3 E(B^3)}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 E(B^2)(3-2\rho)}{2(1-\rho)} + \rho - \rho^2. \quad (3.1.27)$$

特别, 对  $M/M/1$  系统 [设  $B \sim \Gamma(1, \mu)$ ], 因为  $E(B) = \frac{1}{\mu}$ ,  $B^*$

$(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$ , 由 (3.1.26) 式得

$$Q(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} (\rho z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho) \rho^k z^k. \quad (3.1.28)$$

所以, 队长的平稳分布为

$$P\{Q=k\} = (1-\rho)\rho^k, \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.1.29)$$

而对  $M/D/1$  系统, 因为服务时间  $B$  为定长  $\frac{1}{\mu}$ ,  $B^*(s) = e^{-\frac{s}{\mu}}$ ,  $D(B)=0$ , 所以由 (3.1.26) 式, 得

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\exp[\rho(1-z)]}, \quad \rho < 1. \quad (3.1.30)$$

对  $Q(z)$  关于  $z$  求  $k$  阶导数再除以  $k!$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), 并令  $z=0$  得

$$\begin{cases} P\{Q=0\} = 1-\rho, & P\{Q=1\} = (1-\rho)(e^\rho - 1), \\ P\{Q=k\} = (1-\rho) \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} e^{j\rho} \left[ \frac{(j\rho)^{k-j}}{(k-j)!} + (1-\delta_{kj}) \frac{(j\rho)^{k-j-1}}{(k-j-1)!} \right], & k \geq 2. \end{cases} \quad (3.1.31)$$

## § 3.2 等待时间的分布

### 3.2.1 FCFS 等待时间的分布

对于  $M/G/1$  系统, 设  $W$  为一个顾客的等待时间,  $\rho < 1$ . 因为  $Q$  恰好等于在  $W$  与  $B$  内到达的顾客数, 即

$$Q = N(W + B) = N(W) + N(B). \quad (3.2.1)$$

因为

$$\begin{aligned} Q(z) &= E[z^{N(W+B)}] = \int_0^\infty E[z^{N(x+B)} | W = x] dP\{W < x\} \\ &= \int_0^\infty E[z^{N(x+B)}] dP\{W < x\} = \int_0^\infty \int_0^\infty E[z^{N(x+y)}] dP\{B < y\} dP\{W < x\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(1-x)(x+y)} dP\{B < y\} dP\{W < x\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-x)x} dP\{W < x\} \int_0^\infty e^{-\lambda(1-x)y} dP\{B < y\} \\ &= W^*(\lambda - \lambda z) B^*(\lambda - \lambda z), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

其中  $W^*(s)$  为  $W$  的 LST. 由 (3.1.26) 式, 并令  $\lambda(1-z) = s$ , 得

$$\frac{(1-\rho)sB^*(s)}{\lambda B^*(s) + s - \lambda} = W^*(s) B^*(s).$$

从而

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}. \quad (3.2.3)$$

又因

$$\begin{aligned} W^{*'}(s) &= -\lambda(1-\rho) \\ &\cdot \frac{sB^{*'}(s)[\lambda B^*(s) + s - \lambda] - 2[1 - B^*(s) + sB^{*'}(s)][\lambda B^{*'}(s) + 1]}{[\lambda B^*(s) + s - \lambda]^3}, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

连续用洛毕达法则三次 (令  $s \rightarrow 0+0$ ) 得

$$\begin{aligned} W^{*''}(0) &= \lambda(1-\rho) \frac{3\lambda[B^{*'}(0)]^2 - 2B^{*''}(0)[1 + \lambda B^{*'}(0)]}{6[1 + \lambda B^{*'}(0)]^3} \\ &= 2 \left[ \frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

由 (3.1.17) 式得

$$D(W) = \left[ \frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)} = [E(W)]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)}, \quad (3.2.6)$$

故逗留时间  $S$  (因  $S = W + B$ ) 的 LST 为

$$S^*(s) = \frac{(1-\rho)sB^*(s)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \quad (3.2.7)$$

且

$$D(S) = \left[ \frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)} + \sigma^2. \quad (3.2.8)$$

因为  $N(W)$  与  $N(B)$  相互独立, 且

$$\begin{aligned} D[N(B)] &= E[N^2(B)] - E^2[N(B)] \\ &= \lambda E(B) + \lambda^2 E(B^2) - \lambda^2 E^2(B) \\ &= \lambda E(B) + \lambda^2 D(B) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} + \lambda^2 \sigma^2, \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} D[N(W)] &= \lambda E(W) + \lambda^2 D(W) \\ &= \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1-\rho)} + \lambda^2 \left[ \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda^3 E(B^3)}{3(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

由(3.2.1)式也可得(3.1.27)式.

特别, 对于  $M/M/1$  系统, 因为

$$E(B) = \frac{1}{\mu}, D(B) = \frac{1}{\mu^2}, E(B^2) = \frac{2}{\mu^2}, E(B^3) = \frac{6}{\mu^3}, B^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s},$$

所以有

$$W^*(s) = 1 - \rho + \frac{\rho(\mu - \lambda)}{\mu - \lambda + s}. \quad (3.2.12)$$

由拉普拉斯变换的反演公式得  $W$  的密度函数

$$f_W(t) = \begin{cases} (1-\rho)\delta(t) + \rho(\mu - \lambda)e^{-(\mu - \lambda)t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

### 3.2.2 先来后服务(FCLS)等待时间的分布

前面讨论的排队系统都是在先来先服务的规则下进行的, 但是, 在实际问题中往往要考虑先来后服务的情况. 例如, 存货系统的盘存, 以及在某些情况下计算机内部的调试等. 显然, “先来先服务”的队长、忙期与“先来后服务”的队长、忙期是相同的, 但是, 顾客的等待时间是不同的. 因此, 对先来后服务情况我们只需讨论顾

客等待时间.

当顾客到达系统时,如果系统中无顾客,则他不需等待,立即进入服务,如果系统中有顾客,则他要等待,且等待时间仍记为  $W$ . 由于服务规则是先来后服务,所以他的等待时间(与他到达时的队长无关)是两部分之和,第一部分为剩余服务时间  $B_+$ , 因为本章只考虑系统处于平稳状态后的结果,当系统处于平稳后,时间  $t$  将足够长,  $B_+$  即为剩余服务时间的极限;第二部分为他进入系统后一直到他接受服务前到达系统的所有顾客服务时间之和,即

$\sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i$ , 其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  i.i.d, 且均与系统  $M/G/1$  的忙期  $\theta$  同分布,  $\theta_0 = 0, \{N(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda$  的泊松到达过程, 即

$$W = B_+ + \sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i \quad (\text{当系统处于忙期时}). \quad (3.2.14)$$

故  $W$  的 LST 为

$$\begin{aligned} W^*(s) &= E(e^{-sW}) = E[e^{-sW} \mid \text{系统处于忙期时}] \rho \\ &\quad + (1 - \rho) E[e^{-sW} \mid \text{系统处于闲期时}] \\ &= 1 - \rho + \rho E \left[ e^{-s(B_+ + \sum_{i=1}^{N(B_+)} \theta_i)} \right] \\ &= 1 - \rho + \rho \int_0^\infty e^{-st} E \left[ e^{-s \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i} \right] dP\{B_+ < t\} \\ &= 1 - \rho + \rho \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=1}^\infty E \left[ e^{-s \sum_{i=1}^n \theta_i} \right] P\{N(t) = n\} dP\{B_+ < t\} \\ &= 1 - \rho + \rho \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=1}^\infty [\theta^*(s)]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dP\{B_+ < t\} \\ &= 1 - \rho + \rho \int_0^\infty e^{-[s + \lambda - \lambda \theta^*(s)]t} dP\{B_+ < t\} \\ &= 1 - \rho + \rho B_+^* [s + \lambda - \lambda \theta^*(s)] \quad [\text{由(1.6.30)式}] \\ &= 1 - \rho + \rho \frac{\mu \{1 - B^* [s + \lambda - \lambda \theta^*(s)]\}}{s + \lambda - \lambda \theta^*(s)} \quad [\text{由(2.3.29)式}] \end{aligned}$$

$$= 1 - \rho + \frac{\lambda[1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda\theta^*(s)}. \quad (3.2.15)$$

由(3.2.15)式或(3.2.14)式得

$$\begin{aligned} E(W) &= \rho E[B_+ + \sum_{i=1}^{N(B_+)} \theta_i] = \rho \{E(B_+) + E[N(B_+)]E(\theta)\} \\ &= \rho \left\{ \frac{E(B^2)}{2E(B)} + \frac{\lambda E(B^2)}{2E(B)} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} \right\} \\ &= \frac{\lambda E(B^2)}{2(1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

将(3.1.17)式与(3.2.16)式进行比较知,先来先服务平均等待时间与先来后服务平均等待时间是相等的. 因为

$$\begin{aligned} E(W^2 | \text{系统忙}) &= E\left[B_+^2 + 2B_+ \sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i + \left(\sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i\right)^2\right] \\ &= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + 2 \int_0^\infty t E\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right] dP\{B_+ < t\} + \int_0^\infty E\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right]^2 dP\{B_+ < t\} \\ &= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \frac{2\lambda E(B_+^2)}{\mu - \lambda} + \int_0^\infty \left\{ D\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right] + E^2\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right] \right\} dP\{B_+ < t\} \\ &= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \frac{2\lambda E(B_+^2)}{\mu - \lambda} + \lambda E(B_+) D(\theta) + \frac{\lambda E(B_+)}{(\mu - \lambda)^2} + \frac{\lambda^2 E(B_+^2)}{(\mu - \lambda)^2} \\ &= \frac{\mu^2 E(B_+^2)}{(\mu - \lambda)^2} + \frac{\lambda E(B_+)(\mu^3 \sigma^2 + \mu)}{(\mu - \lambda)^3}, \quad \rho < 1, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D(W) &= E(W^2) - E^2(W) = \rho E(W^2 | \text{系统忙}) - \frac{\lambda^2 E^2(B^2)}{4(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\mu^3 E(B^3)}{3(\mu - \lambda)^2} + \frac{\lambda \mu (\mu^3 \sigma^2 + \mu) E(B^2)}{2(\mu - \lambda)^3} - \frac{\lambda^2 [E(B^2)]^2}{4(1 - \rho)^2}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

### § 3.3 $M^k/G/1$ 系统

$M^k/G/1$  系统与  $M/G/1$  系统的区别仅是每次到达的不是一



个顾客,而是  $\xi$  个顾客. 设  $r = E(\xi)$ ,  $\sigma_r^2 = D(\xi)$ ,  $\xi$  的 PGF 为  $R(Z)$ .

设  $Q_n$  为第  $n$  个顾客服务完离开系统时系统队长, 类似于 § 3.1 的证明,  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是一个嵌入马氏链, 且当  $\rho \triangleq \frac{r\lambda}{\mu} < 1$  时该马氏链存在平稳分布. 因为

$$Q_{n+1} = Q_n - \varepsilon(Q_n) + Y_{n+1} + (\xi - 1)\varepsilon(1 - Q_n), \quad (3.3.1)$$

其中  $\varepsilon(x)$  仍由 (3.1.1) 式定义,  $Y_{n+1} = X(B_{n+1})$  为在  $B_{n+1}$  中到达的顾客数, 设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  i. d. d 且均与  $\xi$  同分布,  $\xi_0 = 0$  易见

$$E(Y_{n+1}) = E(X(B_{n+1})) = \int_0^\infty \gamma \lambda p\{B_{n+1} < t\} dt = \xi, \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} E(z^{Y_{n+1}}) &= E[z^{X(B_{n+1})}] = \int_0^\infty E[z^{X(t)}] dP\{B_{n+1} < t\} \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty E[z^{\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_k}] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{B_{n+1} < t\} \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty [R(z)]^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{B_{n+1} < t\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda[1-R(z)]t} dP\{B_{n+1} < t\} \\ &= B^*[\lambda - \lambda R(z)]. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

### 3.3.1 平均队长

在  $\rho = \frac{r\lambda}{\mu} < 1$  条件下, 对 (3.3.1) 式两边取数学期望, 并令  $n \rightarrow \infty$ , 注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_n) \equiv E(Q)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_{n+1}) \equiv E(Y) = E[X(B)]$  与 (3.3.2) 得

$$E[\varepsilon(Q)] = E[X(B)] + E(\xi - 1)E[\varepsilon(1 - Q)],$$

即

$$P\{Q > 0\} = \rho + (r - 1)P\{Q = 0\}.$$

因为  $P\{Q \geq 0\} = 1$ , 所以得

$$P\{Q = 0\} = \frac{1 - \rho}{r}. \quad (3.3.4)$$

从而

$$P\{Q > 0\} = \frac{r + \rho - 1}{r} = E[\varepsilon(Q)]. \quad (3.3.5)$$

对(3.3.1)式两边平方,注意到

$$Q_n \varepsilon(Q_n) = Q_n, \quad Q_n \varepsilon(1 - Q_n) = \varepsilon(Q_n) \varepsilon(1 - Q_n) = 0, \quad \varepsilon^2(Q_n) = \varepsilon(Q_n)$$

得

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^2 &= Q_n^2 + \varepsilon(Q_n) + Y_{n+1}^2 + (\xi - 1)^2 \varepsilon(1 - Q_n) - 2Q_n \\ &\quad - 2Q_n Y_{n+1} - 2Y_{n+1} \varepsilon(Q_n) + 2Y_{n+1}(\xi - 1) \varepsilon(1 - Q_n). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

对上式两边取数学期望,并注意到随机变量的独立性得

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}^2) &= E[X^2(B_{n+1})] = E[X^2(B)] \\ &= \int_0^\infty E[X^2(t) | B = t] dP\{B < t\} \\ &= \int_0^\infty E[X^2(t)] dP\{B < t\} \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty E[X^2(t) | N(t) = k] P\{N(t) = k\} dP\{B < t\} \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty E\left(\sum_{i=0}^k \xi_i\right)^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{B < t\} \\ &= \int_0^\infty (\sigma_r^2 \lambda t + r^2(\lambda t + \lambda^2 t^2)) dP\{B < t\} \\ &= (\lambda \sigma_r^2 + \lambda r^2) E(B) + \lambda^2 r^2 E(B^2) \\ &= r\rho + \rho^2 + \lambda^2 r^2 \sigma^2 + \frac{\lambda}{\mu} \sigma_r^2, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$E[(\xi - 1)^2 \varepsilon(1 - Q_n)] = (\sigma_r^2 + r^2 - 2r + 1) P\{Q_n = 0\}, \quad (3.3.8)$$

$$E[2Q_n Y_{n+1}] = 2E(Y_{n+1})E(Q_n) = 2\rho E(Q_n), \quad (3.3.9)$$

$$E[2Y_{n+1} \varepsilon(Q_n)] = 2\rho P\{Q_n > 0\}, \quad (3.3.10)$$

$$E[2Y_{n+1}(\xi - 1)\varepsilon(1 - Q_n)] = 2\rho(r - 1)P\{Q_n = 0\}. \quad (3.3.11)$$

再令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\begin{aligned}
2(1-\rho)E(Q) &= \frac{r+\rho-1}{r} + \frac{\rho\sigma_r^2}{r} + r\rho + \rho^2 + \lambda^2 r^2 \sigma^2 \\
&\quad + (\sigma_r^2 + r^2 - 2r + 1)\frac{1-\rho}{r} - \frac{2r\rho - 2\rho - 2\rho^2}{r} \\
&\quad + \frac{2r\rho - 2\rho - 2r\rho^2 + 2\rho^2}{r} \\
&= \lambda^2 r^2 \sigma^2 + \rho^2 + 2\rho(1-\rho) + \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{r}.
\end{aligned}$$

故

$$E(Q) = \rho + \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{2r(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 r^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho < 1. \quad (3.3.12)$$

### 3.3.2 队长的分布

假定先到达的批先服务. 由于同批到达的顾客数是随机的, 因此, 同批顾客的顺序是任意的. 设  $Q_n(z)$  为  $Q_n$  的 PGF,  $Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z)$ , 因为

$$\begin{aligned}
E[z^{Q_n - \varepsilon(Q_n) + (\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[z^{k - \varepsilon(k) + (\xi-1)\varepsilon(1-k)}] P\{Q_n = k\} \\
&= E(z^{\xi-1}) P\{Q_n = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} P\{Q_n = k\} \\
&= \frac{1-\rho}{rz} R(z) + \frac{1}{z} [Q_n(z) - P\{Q_n = 0\}].
\end{aligned} \quad (3.3.13)$$

由(3.3.3)式得

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n+1}(z) = E(z^Y) \lim_{n \rightarrow \infty} E[z^{Q_n - \varepsilon(Q_n) + (\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}] \\
&= B^*[\lambda - \lambda R(z)] \left\{ \frac{1-\rho}{rz} [R(z) - 1] + \frac{Q(z)}{z} \right\}.
\end{aligned} \quad (3.3.14)$$

解  $Q(z)$  得

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)[R(z)-1]B^*[\lambda - \lambda R(z)]}{rz - rB^*[\lambda - \lambda R(z)]}. \quad (3.3.15)$$

当  $\xi$  恒为 1 时, 由上式立得(3.1.26)式.

### 3.3.3 忙期

对  $M^{\xi}/G/1$  系统来说,忙期有两种不同的含义,第一种含义是:由一批( $\xi$ 个)顾客引出的忙期.它是指:系统本来处于闲期,从系统开始到达一批顾客时起一直到系统中又没有顾客时止这段时间,用  $\Theta$  表示其长. $\Theta$  是  $M^{\xi}/G/1$  系统得忙期.到达的  $\xi$  个顾客分别记为  $A_1, A_2, \dots, A_{\xi}$ .由于忙期与服务顺序无关,所以,在讨论忙期时,有时依先来后服务规则处理,即先为  $A_1$  服务然后为在服务  $A_1$  期间到达的顾客(这些顾客可视为  $A_1$  的第一代“子女”)服务,然后为  $A_1$  的第一代“子女”服务期间到达的顾客(这些顾客可视为  $A_1$  的第二代“子女”)服务,如此等等,当  $A_1$  以及其各代“子女”都服务完时,再为  $A_2$  及其各代“子女”服务,依此类推.由此,又引出第二种忙期,它是指:从开始为一个顾客服务时起一直到该顾客以及其各代“子女”都服务完时止这段时间,用  $\theta$  表示其长.用  $\theta^*(s), \Theta^*(s)$  分别表示  $\theta, \Theta$  的 LST.易见有

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\xi} \theta_i, \quad (3.3.16)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  相互独立且均与  $\theta$  同分布,从而有

$$\Theta^*(s) = R[\theta^*(s)], \quad (\text{其中 } R(z) \text{ 为 } \xi \text{ 的 PGF}). \quad (3.3.17)$$

$$\text{又因} \quad \theta = B + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{N(B)}, \quad (3.3.18)$$

$$\Theta = U + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{N(U)}, \quad (3.3.19)$$

其中  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$  相互独立均与  $\Theta$  同分布,  $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i, B_1, B_2, B_3, \dots$  相互独立均与  $B$  同分布,  $N(B)$  为在  $B$  中到达的批数.由 (3.3.18) 式得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &= E(e^{-s\theta}), \\ &= E\{e^{-s[B+\Theta_1+\Theta_2+\dots+\Theta_{N(B)}]}\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} E\{e^{-s[\Theta_1+\Theta_2+\dots+\Theta_{N(t)}]}\} dP\{B < t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-[\lambda - \lambda \Theta^*(s)]t} dP\{B < t\} = B^*[s + \lambda - \lambda \Theta^*(s)] \\
&= B^*[s + \lambda - \lambda R(\theta^*(s))]. \quad (3.3.20)
\end{aligned}$$

由(3.3.20)与(3.3.17)式或由(3.3.19)式得

$$\Theta^*(s) = R\{B^*[s + \lambda - \lambda \Theta^*(s)]\}. \quad (3.3.21)$$

因为

$$E(U) = \frac{r}{\mu}, \quad D(U) = r\sigma^2 + \frac{\sigma_r^2}{\mu^2}, \quad (3.3.22)$$

所以,由(3.3.19)式得

$$E(\Theta) = \frac{r}{\mu - r\lambda}, \quad D(\Theta) = \frac{r^2\rho + \sigma_r^2 + r\mu^2\sigma^2}{\mu^2(1-\rho)^3}, \quad \rho = \frac{r\lambda}{\mu} < 1. \quad (3.3.23)$$

由(3.3.16)或(3.3.20)式,得

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \quad D(\theta) = \frac{r\mu^2\sigma^2 + r^2\rho + \rho\sigma_r^2}{r\mu^2(1-\rho)^3}, \quad \rho = \frac{r\lambda}{\mu} < 1. \quad (3.3.24)$$

设 $\Sigma$ 为一个忙期 $\Theta$ 中服务完的顾客数, $M$ 为在一个 $\theta$ 中服务完的顾客数. $\Sigma(z)$ , $M(z)$ 分别为 $\Sigma$ , $M$ 的PGF,则易见有

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \quad (3.3.25)$$

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{N(B)}, \quad (3.3.26)$$

$$\Sigma = \xi + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{N(u)}, \quad (3.3.27)$$

其中 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \cdots$ 相互独立均与 $\Sigma$ 同分布.类似于上述(3.3.17), (3.3.20), (3.3.21)式的推导得

$$\Sigma(z) = R[M(z)], \quad (3.3.28)$$

$$M(z) = zB^*\{\lambda - \lambda R[M(z)]\}, \quad (3.3.29)$$

$$\Sigma(z) = R\{zB^*[\lambda - \lambda \Sigma(z)]\}, \quad (3.3.30)$$

从而得

$$E(\Sigma) = \frac{r}{1-\rho}, \quad D(\Sigma) = \frac{\sigma_r^2 + \lambda^2 r^3 \sigma^2 + r^2 \rho}{(1-\rho)^3}, \quad \rho = \frac{r\lambda}{\mu}, \quad (3.3.31)$$

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, \rho < 1, \quad (3.3.32)$$

$$D(\Sigma) = rD(M) + \sigma_r^2 \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad (3.3.33)$$

$$D(M) = \frac{\rho\sigma_r^2 + \lambda^2 r^3 \sigma^2 + r^2 \rho}{r(1-\rho)^3}, \quad \rho = \frac{r\lambda}{\mu}. \quad (3.3.34)$$

### 3.3.4 FCFS 规则下的等待时间

用  $W$  表示 FCFS 规则下的一个顾客的等待时间的长. 因为  $W$  由两部分组成, 一部分是该顾客(用  $A$  表示)所在批的等待时间  $W_f$ , 另一部分该顾客在批中的等待时间  $W_s$ , 即

$$W = W_f + W_s. \quad (3.3.35)$$

又因  $W_f$  与  $W_s$  独立, 所以当用  $W^*(s)$ ,  $W_f^*(s)$ ,  $W_s^*(s)$  分别表示  $W$ ,  $W_f$ ,  $W_s$  的 LST 时, 有

$$W^*(s) = W_f^*(s) W_s^*(s). \quad (3.3.36)$$

又因  $U \equiv \sum_{i=1}^{\xi} B_i$  的 LST 为

$$U^*(s) = R[B^*(s)]. \quad (3.3.37)$$

将(3.2.3)中的  $B^*(s)$  换成  $U^*(s)$  立得

$$W_f^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda R[B^*(s)]}, \quad \rho = \frac{\lambda r}{\mu} < 1. \quad (3.3.38)$$

由(3.1.17)得

$$E(W_f) = \frac{\lambda E(U^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda(r\mu^2\sigma^2 + \sigma_r^2 + r^2)}{2\mu^2(1-\rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda r}{\mu}. \quad (3.3.39)$$

因为

$$\begin{aligned} E(U^3) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^3 P\{\xi = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E(B_i B_j B_k) P\{\xi = n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{ nE(B^3) + 3n(n-1)E(B)E(B^2) \\
&\quad + (n-2)(n-1)n[E(B)]^3 \} P\{\xi = n\} \\
&= rE(B^3) + \frac{1}{\mu^3} [3\mu^2\sigma^2(\sigma_r^2 + r^2 - r) + E(\xi^3) - r],
\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

所以由(3.2.6), (3.1.17), (3.3.40)式得

$$\begin{aligned}
D(W_f) &= [E(W_f)]^2 + \frac{\lambda}{3(1-\rho)} \{ rE(B^3) \\
&\quad + \frac{1}{\mu^3} [3\mu^2\sigma^2(\sigma_r^2 + r^2 - r) + E(\xi^3) - r] \}, \\
\rho &= \frac{\lambda r}{\mu} < 1.
\end{aligned} \tag{3.3.41}$$

现来求  $W_s^*(s)$ , 因为顾客  $A$  是一批  $\xi$  个顾客中任一个顾客, 他在批中的位置可以是  $\xi$  个位置中的任一个位置, 又因一批顾客的服务时间为  $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i$ , 现在  $U$  中任取一点, 该点依概率为 1 落在某个服务时间  $B$  中, 此  $B$  所在的位置认为就是顾客  $A$  在批队列中的位置是合理的. 由图 3-1 易见,  $W_s$  与  $B$  的年龄(逝去时间)  $B_-$  之和等于  $U$  的年龄  $U_-$ , 即

$$U_- = B_- + W_s. \tag{3.3.42}$$

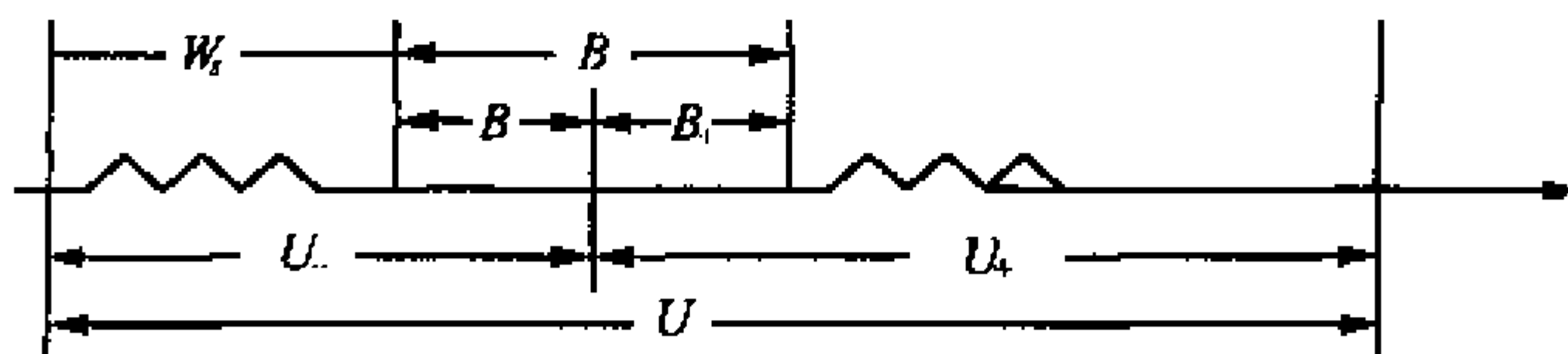


图 3-1

又因  $B_-$  与  $W_s$  相互独立, 所以  $U_-$  的 LST 等于  $B_-$ ,  $W_s$  的 LST 之积, 即

$$U_-^*(s) = B_-^*(s) W_s^*(s). \tag{3.3.43}$$

再由(1.6.30)式得

$$\frac{1 - U^*(s)}{sE(U)} = \frac{1 - B^*(s)}{sE(B)} W_s^*(s). \quad (3.3.44)$$

故

$$W_s^*(s) = \frac{1 - U^*(s)}{1 - B^*(s)} \cdot \frac{E(B)}{E(U)} = \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]}, \quad (3.3.45)$$

且

$$\begin{aligned} E(W_s) &= E(U_-) - E(B_-) = \frac{E(U^2)}{2E(U)} - \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{r\mu^2\sigma^2 + \sigma_r^2 + r^2}{2r\mu} - \frac{\mu^2\sigma^2 + 1}{2\mu} \\ &= \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{2r\mu}, \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

$$D(W_s) = D(U_-) - D(B_-)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{E(U^3)}{3E(U)} - \left[ \frac{E(U^2)}{2E(U)} \right]^2 - \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \left[ \frac{E(B^2)}{2E(B)} \right]^2 \\ &= \frac{E(U^3) - rE(B^3)}{3rE(B)} + \frac{(2r\mu^2\sigma^2 + \sigma_r^2 + r^2 + r)(r - \sigma_r^2 - r^2)}{4r^2\mu^2} \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

由(3.3.36), (3.3.38)与(3.3.45)式得

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda R[B^*(s)]} \cdot \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]}, \quad (3.3.48)$$

且

$$E(W) = E(W_f) + E(W_s) = \frac{\lambda r^2 \mu^2 \sigma^2 + \mu \sigma_r^2 + r\mu(r + \rho - 1)}{2r\mu^2(1 - \rho)}. \quad (3.3.49)$$

由图 3-1, 设在顾客 A 之前的顾客数为  $\xi$ , 则有

$$W_s = \sum_{i=0}^{\xi} B_i, \quad B_0 = 0. \quad (3.3.50)$$

记  $\xi$  的 PGF 为  $\xi(z)$ , 则得

$$W_s^*(s) = \xi[B^*(s)].$$

由(3.3.45)式得



$$\frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]} = \xi[B^*(s)].$$

令  $B^*(s) = z$ , 得

$$\xi(z) = \frac{1 - R(z)}{r(1 - z)}. \quad (3.3.51)$$

由 PGF 的反演公式, 得

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{k!} \xi^{(k)}(0) = \frac{P\{\xi > k\}}{r}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3.52)$$

即在长为  $\xi$  的队列中任意选一个顾客, 则在该顾客之前的顾客数  $\xi$  的分布由 (3.3.52) 式给出,  $\xi$  的 PGF 由 (3.3.51) 式给出, 由于  $U$  的剩余时间  $U_+$  与  $U$  的年龄  $U_-$  同分布, 所以在该顾客之后的顾客数也与  $\xi$  同分布, 由 (3.3.52) 式知

$$P\{\xi = 0\} = \frac{1}{r} = \frac{1}{E(\xi)}. \quad (3.3.53)$$

### 3.3.5 FCLS 规则下的等待时间

在  $M^c/G/1$  系统中, 设  $W$  为一个顾客在非抢占 FCLS 规则下等待时间(的长), 则  $W$  也由两部分组成, 一部分为该顾客所在批的等待时间  $W_f$ , 另一部分为该顾客在批中的等待时间  $W_s$ , 即

$$W = W_f + W_s. \quad (3.3.54)$$

由于  $W_f$  与  $W_s$  独立, 所以有

$$W^*(s) = W_f^*(s) W_s^*(s), \quad (3.3.55)$$

因为

$$W_f = B_+ + \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{N(B_+)}, \quad W_f > 0, \quad (3.3.56)$$

又因这时有关系式(见图 3-1)

$$U_+ = W_s + B_+, \quad (3.3.57)$$

其中  $B_+$ ,  $U_+$  分别为  $B$ ,  $U$  的剩余时间(寿命). 由 (3.3.56) 式得

$$\begin{aligned} W_f^*(s) = & E[e^{-sW_f} | \text{批到达时系统不空}] P\{\text{批到达时系统不空}\} \\ & + E[e^{-sW_f} | \text{批到达时系统空}] P\{\text{批到达时系统空}\}. \end{aligned}$$

因为  $E[e^{-sW_f} | \text{批到达时系统不空}]$

$$\begin{aligned}
&= E \{ e^{-s[B_+ + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}]} \} \\
&= \int_0^\infty e^{-st} E \{ e^{-s[\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(t)}]} \} dP \{ B_+ < t \} \\
&= B_+^* [s + \lambda - \lambda \Theta^*(s)] \\
&= \frac{1 - B^* [s + \lambda - \lambda \Theta^*(s)]}{[S + \lambda - \lambda \Theta^*(s)] E(B)} \quad [\text{由(3.3.20)}] \\
&= \frac{\mu [1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]}. \quad (3.3.58)
\end{aligned}$$

记  $p = P\{\text{批到达时系统空}\}$ , 从而得

$$W_f^*(s) = (1 - p) \frac{\mu [1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]} + p. \quad (3.3.59)$$

Cohen[1982]给出  $M_\xi/G/1$  系统任意时刻队长的概率母函数:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)B^*[\lambda - \lambda R(z)]}{B^*[\lambda - \lambda R(z)] - z}. \quad (3.3.60)$$

从而

$$p = P(0) = 1 - \rho. \quad [\text{注意: } R(0) = 0], \rho = \frac{\lambda r}{\mu}. \quad (3.3.61)$$

将(3.3.61)代入(3.3.59)得

$$W_f^*(s) = 1 - \rho + \frac{\lambda r [1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]}. \quad (3.3.62)$$

又因  $U_+$  与  $U_-$  同分布,  $B_+$  与  $B_-$  同分布, 由(3.3.57)式, 利用求(3.3.45)式类似的方法得

$$W_s^*(s) = \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]}. \quad (3.3.63)$$

由(3.3.55), (3.3.62), (3.3.63)式得

$$\begin{aligned}
W^*(s) &= \frac{(1 - \rho) \{1 - R[B^*(s)]\}}{r[1 - B^*(s)]} \\
&\quad + \frac{\lambda [1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]} \cdot \frac{1 - R[B^*(s)]}{1 - B^*(s)}, \quad (3.3.64)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
E(W) &= E(W_f) + E(W_s) \\
&= \rho \{E(B_+) + E[N(B_+)]E(\Theta)\} + E(U_+) - E(B_+) \\
&= \frac{\rho + \rho\mu^2\sigma^2}{2\mu(1-\rho)} + \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{2r\mu}.
\end{aligned} \tag{3.3.65}$$

### § 3.4 具有反馈的 $M/G/1$ 系统

在  $M/G/1$  系统中, 设每个顾客每次被服务完后以概率  $1-\alpha$  立刻排到队尾等待下一次服务, 而以概率  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 立刻离系统, 永不再来, 设  $\xi$  为一个顾客的总的服务次数. 易见,  $\xi$  服从参数为  $\alpha$  的几何分布, 即  $\xi \sim \text{Geo}(\alpha)$ , 从而每个顾客的总的服务时间为

$\sum_{i=1}^{\xi} B_i$ , 记为  $V$ , 即

$$V = \sum_{i=1}^{\xi} B_i, \tag{3.4.1}$$

其中  $B_1, B_2, B_3, \dots$  相互独立同分布, 且均于  $B$  同分布, 为使系统的平稳分布存在, 本节总假设

$$\rho \triangleq \lambda E(V) = \frac{\lambda}{\alpha\mu} < 1. \tag{3.4.2}$$

#### 3.4.1 队长的分布

设  $Q_n$  为第  $n$  个顾客服务完离开系统时系统中的顾客数 (队长),  $L_n$  为第  $n$  个顾客被服务完时 (不一定离开系统) 系统中的顾客数 (队长),  $A_{n+1}$  为第  $n+1$  个顾客的总服务时间中到达的顾客数. 由于服务时间  $B_1, B_2, B_3, \dots$  相互独立同分布, 所以各个顾客的总服务时间也相互独立分布, 且均与  $V$  同分布, 又因每连续服务  $\xi$  次就有一个顾客离开, 故

$$Q_{n+1} = Q_n - \epsilon(Q_n) + A_{n+1} = Q_n - \epsilon(Q_n) + N(V). \tag{3.4.3}$$

又因  $V$  的 LST 为

$$V^*(s) = E(e^{-sV}) = E(e^{-s\sum_{i=1}^{\infty} B_i}) = \frac{\alpha B^*(s)}{1 - (1 - \alpha)B^*(s)}. \quad (3.4.4)$$

$A_{n+1}$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} E(z^{A_{n+1}}) &= E[z^{N(V)}] = \int_0^{\infty} E[z^{N(t)}] dP\{V < t\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)t} dP\{V < t\} = V^*(\lambda - \lambda z) \\ &= \frac{\alpha B^*(\lambda - \lambda z)}{1 - (1 - \alpha)B^*(\lambda - \lambda z)}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

故  $Q_{n+1}$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= E(z^{A_{n+1}})E[z^{Q_n - \varepsilon(Q_n)}] \\ &= E(z^{A_{n+1}})\{P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} z^k P\{Q_n = k\}\} \\ &= E(z^{A_{n+1}})\{P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z}Q_n(z) - \frac{1}{z}P\{Q_n = 0\}\}. \end{aligned}$$

记  $Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z)$ ,  $P\{Q=0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n=0\}$ , 令  $n \rightarrow \infty$  得

$$Q(z) = \frac{\alpha B^*(\lambda - \lambda z)}{1 - (1 - \alpha)B^*(\lambda - \lambda z)} \{P\{Q=0\}(1 - \frac{1}{z}) + \frac{1}{z}Q(z)\}.$$

解出  $Q(z)$  得

$$Q(z) = P\{Q=0\} \frac{\alpha(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{[\alpha + (1-\alpha)z]B^*(\lambda - \lambda z) - z}. \quad (3.4.6)$$

令  $z=1$  得

$$P\{Q=0\} = 1 - \frac{\lambda}{\alpha\mu} = 1 - \rho. \quad (3.4.7)$$

从而得

$$Q(z) = \frac{\alpha(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda - \lambda z)}{[\alpha + (1-\alpha)z]B^*(\lambda - \lambda z) - z}. \quad (3.4.8)$$

由此得

$$E(Q) \triangleq Q'(1) = \frac{2\rho(1-\alpha\rho) + \lambda\mu\rho E(B^2)}{2(1-\rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\alpha\mu} < 1. \quad (3.4.9)$$

因为

$$L_n = \begin{cases} Q_n, & \text{第 } n \text{ 个顾客服务完离开系统,} \\ Q_n + 1, & \text{第 } n \text{ 个顾客服务完反馈,} \end{cases} \quad (3.4.10)$$

所以

$$\begin{aligned} E(z^{L_n}) &= \alpha E(z^{Q_n}) + (1 - \alpha) E[z^{Q_n+1}] \\ &= [\alpha + (1 - \alpha)z] E(z^{Q_n}). \end{aligned}$$

记  $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(z^{L_n})$ , 令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$L(z) = \frac{\alpha(1-\rho)(1-z)[\alpha + (1-\alpha)z]B^*(\lambda - \lambda z)}{[\alpha + (1-\alpha)z]B^*(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (3.4.11)$$

且

$$E(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(L_n) = 1 - \alpha + E(Q). \quad (3.4.12)$$

### 3.4.2 忙期

设  $\theta$  为具有反馈的  $M/G/1$  系统的忙期. 由于忙期与服务顺序无关, 所以“先来先服务”有时可视为“先来后服务”. 当一个顾客 (记为  $A$ ) 到达时, 如果系统中没有顾客, 服务台将立刻对顾客  $A$  进行服务, 从而忙期开始, 当  $A$  被服务完时, 如果不反馈, 服务台接着就为服务  $A$  期间到达的第一个顾客服务 (如果有顾客到达的话); 如果  $A$  被服务完时反馈, 服务台接着仍为  $A$  服务, 一直到  $A$  被服务完离开系统, 服务台才为服务  $A$  期间到达的第一个顾客服务, 如此等等. 于是得

$$\theta = V + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(V)}, \quad (3.4.13)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$  相互独立均与  $\theta$  同分布. 由 (3.3.4) 式得

$$\begin{aligned} \theta^*(s) &\triangleq E(e^{-s\theta}) = E\{e^{-s[V + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(V)}]}\} \\ &= \int_0^\infty e^{-st} E[e^{-s \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i}] dP\{V < t\} \\ &= \int_0^\infty e^{-[s + \lambda - \lambda \theta^*(s)]t} dP\{V < t\} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

$$= V^*[s + \lambda - \lambda\theta^*(s)] \quad (3.4.15)$$

$$= \frac{\alpha B^*[s + \lambda - \lambda\theta^*(s)]}{1 - (1 - \alpha)B^*[s + \lambda - \lambda\theta^*(s)]}. \quad (3.4.16)$$

因为

$$E(V) = E\left(\sum_{i=1}^{\xi} B_i\right) = E(\xi)E(B) = \frac{1}{\alpha\mu}, \quad (3.4.17)$$

$$D(V) = E(\xi)D(B) + D(\xi)[E(B)]^2 = \frac{\sigma^2}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2\mu^2}. \quad (3.4.18)$$

再由(3.4.15)式得

$$E(\theta) = \frac{1}{\alpha\mu - \lambda}, \quad (3.4.19)$$

$$D(\theta) = \frac{\alpha\mu(\alpha\mu^2\sigma^2 + 1 - \alpha) + \lambda}{(\alpha\mu - \lambda)^3}. \quad (3.4.20)$$

因  $\pi_0 = P\{Q=0\}$ ,  $\lambda_0 = \lambda$ , 则由(3.4.7)与(3.4.19), 有

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\pi_0} - 1 \right). \quad (3.4.21)$$

即(2.3.11)式对于  $M/G/1$  系统与具有反馈的  $M/G/1$  系统也都成立.

设  $M$  为在一个忙期  $\theta$  内(服务完)离开系统的顾客数, 则类似于(3.4.13)式, 有

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(V)}, \quad (3.4.22)$$

其中  $M_1, M_2, M_3 \cdots$  相互独立均与  $M$  同分布, 于是  $M$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} M(z) &= E(z^M) = zE[z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(V)}}] \\ &= zV^*[\lambda - \lambda M(z)] \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

$$= \frac{z\alpha B^*[\lambda - \lambda M(z)]}{1 - (1 - \alpha)B^*[\lambda - \lambda M(z)]}. \quad (3.4.24)$$

由(3.4.22)得

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, D(M) = \frac{\rho + \rho^2(\alpha\mu^2\sigma^2 + 1 - \alpha)}{(1-\rho)^3}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\alpha\mu} < 1. \quad (3.4.25)$$

### 3.4.3 逗留时间的分布

现讨论具有反馈概率 $(1 - \alpha)$ 的  $M/M/1$  系统逗留时间的分布. 设  $B \sim \Gamma(1, \mu)$ ,  $T_i$  为一个顾客的第  $i$  次逗留时间,  $i = 1, 2, 3, \dots$  易见,  $T_1, T_2, T_3, \dots$  相互独立同分布. 设  $T$  为一个顾客的总的逗留时间, 由于一个顾客需服务  $\xi$  次才离开系统, 故有

$$T = \sum_{i=1}^{\xi} T_i. \quad (3.4.26)$$

由于在  $T_i$  中到达系统的顾客数由两部分组成, 一部分为  $N(T_i)$ , 另一部分为反馈的顾客数. 又因在  $T_i$  中每经过时间  $B$  就有一个顾客被服务完, 该顾客以概率  $(1 - \alpha)$  立即排到队尾等待下一次服务, 所以在忙期期间, 在  $[0, t]$  中服务完的顾客数  $Y(t)$  是参数为  $\mu$  的泊松过程. 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{在间隔 } [0, t] \text{ 中服务完的第 } i \text{ 个顾客反馈,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad (3.4.27)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, X_0 = 0$ , 记

$$H(t) = \sum_{i=0}^{Y(t)} X_i, \quad t \geq 0. \quad (3.4.28)$$

则反馈过程  $\{H(t), t \geq 0\}$  是参数为  $(1 - \alpha)\mu$  的泊松过程. 令

$$I(t) = N(t) + H(t), \quad t \geq 0.$$

则  $\{I(t), t \geq 0\}$  为参数是  $\lambda + (1 - \alpha)\mu$  的泊松过程. 从而在  $T_i$  内到达系统的顾客数为  $I(T_i)$ , 又因  $I(T_i) = L$ , 所以

$$\begin{aligned} L(z) &= E[z^{I(T_i)}] = \int_0^\infty E[z^{I(t)}] dP\{T_i < t\} \\ &= \int_0^\infty e^{-[\lambda + (1 - \alpha)\mu](1 - z)t} dP\{T_i < t\} \\ &= T_i^*[(\lambda + \mu - \alpha\mu)(1 - z)]. \end{aligned}$$

令  $(\lambda + \mu - \alpha\mu)(1 - z) = s$ , 则  $z = \frac{\lambda + \mu - \alpha\mu - s}{\lambda + \mu - \alpha\mu}$ , 由 (3.4.11) 式得

$$\begin{aligned}
T_1^*(s) &= L\left(\frac{\lambda + \mu - \alpha\mu - s}{\lambda + \mu - \alpha\mu}\right) = L\left(\frac{\beta - s}{\beta}\right) \\
&= \frac{\alpha(1 - \rho)s(\beta - s + \alpha s)B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right)}{\beta(\beta - s + \alpha s)B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right) - \beta(\beta - s)} \\
&\quad \left(\text{因 } B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right) = \frac{\beta\mu}{\beta\mu + \lambda s}\right) \\
&= \frac{(\mu\alpha - \lambda)(\beta - s + \alpha s)}{\beta\mu\alpha - \beta\lambda + \lambda s}, \tag{3.4.29}
\end{aligned}$$

其中

$$\beta = \lambda + \mu - \alpha\mu. \tag{3.4.30}$$

由(3.4.26)得  $T$  的 LST

$$T^*(s) = \frac{\alpha T_1^*(s)}{1 - (1 - \alpha)T_1^*(s)} = \frac{(\alpha\mu - \lambda)(\beta - s + \alpha s)}{2(\lambda - \alpha\mu)s + \beta\alpha\mu + (\mu - \lambda\alpha + \mu\alpha^2)s}, \tag{3.4.31}$$

$$\begin{aligned}
E(T) &= E(\xi)E(T_1) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}E(L)\right] = \frac{1}{\alpha\beta}E(L) \\
&= \frac{1 - \alpha}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}E(Q) = \frac{1 - \alpha}{\alpha\beta} + \frac{2\rho(1 - \alpha\rho) + \lambda\mu\rho E(B^2)}{2\alpha\beta(1 - \rho)} \\
&= \frac{2(1 - \alpha + \alpha\rho - \alpha\rho^2) + \lambda\mu\rho E(B^2)}{2\alpha\beta(1 - \rho)} \\
&= \frac{1 - \alpha + \alpha\rho}{\alpha\beta(1 - \rho)}. \tag{3.4.32}
\end{aligned}$$

当  $\alpha = 1$  时, 即顾客不反馈时, 得  $E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . 此与(2.1.44)式相同.

### § 3.5 优先非抢占的 $M/G/1$ 系统

前面讨论的都是不分优先服务等级的排队系统. 现讨论在实际当中经常碰到的有优先服务权的排队系统.

设  $M/G/1$  系统有不同优先服务权的  $n$  类顾客到达, 第  $i$  类



顾客的到达过程  $\{N_i(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda_i$  的泊松过程. 服务时间为  $B_i$ ,  $E(B_i) = \frac{1}{\mu_i}$ ,  $D(B_i) = \sigma_i^2$ , 第  $i$  类顾客的优先权高于第  $i+1$  类顾客,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 第  $n$  类顾客的优先权最低. 同类顾客仍依 FCFS 规则进行服务. 有优先权的排队系统一般分为两种: 一种叫非抢占系统. 另一种叫抢占系统. 当优先级高的顾客到达系统后, 如果不中断正在服务的优先级低的顾客的服务, 而等到他服务完离开后才使用服务台, 这就叫非抢占, 当优先级高的顾客到达系统后, 如果抢占正在接受服务的优先级低的顾客的服务台, 这就叫做抢占. 本节讨论非抢占  $M/G/1$  系统. 设诸到达过程相互独立, 所有服务时间相互独立, 同类顾客的服务时间具有相同的分布.

记

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (3.5.1)$$

并记  $W_i$  为第  $i$  类顾客的等待时间,  $J_i$  为第  $i$  类顾客到达间隔时间,  $x_{iq}$  为新顾客到达时第  $i$  类顾客的排队长,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 当系统处于平稳后 ( $\rho < 1$ ), 一个第 1 类顾客的等待时间由两部分组成. 一部分为系统的剩余服务时间  $W_0$ , 当他到达时如果系统中有顾客, 则  $W_0 > 0$ , 否则  $W_0 = 0$ ; 另一部分为他到达时系统中所有第 1 类顾客的服务时间之和, 即  $\sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j}$ , 其中  $B_{1j}$  为第一类第  $j$  个顾客的服务时间,  $B_{11}, B_{12}, B_{13}, \dots$  相互独立均与  $B_1$  同分布. 设  $\eta_i$  为第  $i$  类顾客的剩余服务时间, 由 (1.6.30) 式得

$$E(\eta_i) = E(B_{i+}) = \frac{E(B_i^2)}{2E(B_i)} = \frac{\mu_i E(B_i^2)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因为任一时刻到达的顾客属于第  $i$  类顾客的概率为

$$P\{J_i < \min(J_1, J_2, \dots, J_{i-1}, J_{i+1}, \dots, J_n)\} = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad (3.5.2)$$

即服务台为第  $i$  类顾客服务的概率为

$$P\{B = B_i\} = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad (3.5.3)$$

其中  $B$  为系统的服务时间, 所以服务台被占的概率为

$$\begin{aligned}\lambda E(B) &= \lambda \sum_{i=1}^n E(B \mid B = B_i) P\{B = B_i\} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n E(B_i) P\{B = B_i\} = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda} = \rho.\end{aligned}\quad (3.5.4)$$

故

$$E(B) = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned}E(B^2) &= \sum_{i=1}^n E(B^2 \mid B = B_i) P\{B = B_i\} \\ &= \sum_{i=1}^n E(B_i^2) P\{B = B_i\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sigma_i^2 + \frac{1}{\mu_i^2} \right) \frac{\lambda_i}{\lambda}.\end{aligned}\quad (3.5.6)$$

从而

$$\begin{aligned}E(W_0) &= \rho E(W_0 \mid \text{台被占}) = \rho \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i \sigma_i^2 + \frac{\rho_i}{\mu_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i E(B_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^n \rho_i E(\eta_i).\end{aligned}\quad (3.5.7)$$

因为

$$W_1 = W_0 + \sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j}, \quad (3.5.8)$$

所以由利特尔公式得

$$\begin{aligned}E(W_1) &= E(W_0) + E(x_{1q}) E(B_1) = E(W_0) + \frac{1}{\mu_1} E(x_{1q}) \\ &= E(W_0) + \rho_1 E(W_1) = \frac{E(W_0)}{1 - \rho_1}.\end{aligned}\quad (3.5.9)$$

对第二类顾客而言, 有

$$W_2 = W_0 + \sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j} + \sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j} + \sum_{j=1}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}, \quad (3.5.10)$$

其中

$$W_G = W_0 + \sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j} + \sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j}. \quad (3.5.11)$$

$W_0$  为第二类一个顾客到达时系统的剩余服务时间,  $\sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j}$  为系统中第二类顾客的工作量. 与  $\sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j}$  类似,  $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \dots$  相互独立均与  $\theta_1$  同分布.  $\theta_1$  为到达是  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  服务时间是  $B_1$  的  $M/G/1$  系统的忙期, 即

$$W_2 = W_G + \sum_{j=1}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}. \quad (3.5.12)$$

因为

$$\begin{aligned} E(W_G) &= E(W_0) + \rho_1 E(W_1) + \rho_2 E(W_2) \\ &= \frac{E(W_0)}{1 - \rho_1} + \rho_2 E(W_2), \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}\right) &= \lambda_1 E(W_G) E(\theta_1) = \frac{\lambda_1 E(W_G)}{\mu_1 - \lambda_1} \\ &= \frac{\rho_1 E(W_G)}{1 - \rho_1} = \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)^2} E(W_0) + \frac{\rho_1 \rho_2 E(W_2)}{1 - \rho_1}, \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

所以

$$E(W_2) = \frac{E(W_0)}{(1 - \rho_1)^2} + \frac{\rho_2 E(W_2)}{1 - \rho_1},$$

即

$$E(W_2) = \frac{1}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} E(W_0). \quad (3.5.15)$$

依此类推得

$$E(W_j) = E(W_0) / (1 - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i)(1 - \sum_{i=1}^j \rho_i), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5.16)$$

从而由利特尔公式得

$$E(x_{jq}) = \lambda_j E(W_j) = \frac{\lambda_j E(W_0)}{(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i)(1 - \sum_{i=1}^j \rho_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5.17)$$

$$\begin{cases} E(T_j) = E(W_j) + \frac{1}{\mu_j}, \\ E(x_j) = \lambda_j E(W_j) + \rho_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5.18)$$

其中  $T_j$  为第  $j$  类顾客的逗留时间,  $x_j$  为第  $j$  类顾客的队长.

## 第四章 具有假时间的 $M/G/1$ 系统

先介绍以后要用到的几个术语. 称服务员不工作或空闲的一段时间为假期. 称服务员连续工作的一段时间为工作期. 假期与工作期是交替出现的, 在任一时刻服务员必处于二者之一. 一个假期可以包含若干个假时间, 就像一个工作期包含若干个服务时间一样. 一般地, 一个假期中的假时间的长不一定是独立的或同分布的, 一个假期可以在系统不空时开始, 但是当假期结束时系统不能是空的. 这是因为一个工作期不能在无信元(顾客)时开始. 在两个连续的假时间之间的时间间隔称为一个服务期. 在假时间结束时如果无信元在等待, 则服务期的长为 0. 一个工作期是这样的一个服务期, 在这个服务期中至少有一个信元被服务. 称两个相继假时间结束点之间的时间间隔为一个服务周期. 换句话说, 一个服务周期由一个服务期(长度可能为 0)和一个紧接着的假时间组成, 由一个假期和一个紧接着的工作期组成的时间间隔称为一个假周期. 上述术语及记法见图 4-1.

用  $f$  表示在每个假时间中到达系统的信元数. 用  $\alpha$  表示在每个假期中到达系统的信元数,  $\alpha$  总是正的, 而  $f$  可以为 0.  $f$  和  $\alpha$  的概率分布和 PGF 分别记为

$$\begin{cases} f_m \triangleq P\{f = m\}, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ F(Z) \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} Z^m f_m, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_m \triangleq P\{\alpha = m\}, & m = 1, 2, 3, \dots, \\ \alpha(Z) \triangleq \sum_{m=1}^{\infty} Z^m \alpha_m. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

记  $L$  为一个服务时间结束时系统中的信元数.

$L^-$  为一个工作期结束时 (= 一个假期开始时) 系统中的信元

数.

$L^+$  为一个假期结束时( = 一个工作期开始时)系统中的信元数.

$L^x$  为一个服务期结束时( = 一个假时间开始时)系统中的信元数.

$L^*$  为一个假时间结束时( = 一个服务期开始时)系统中的信元数.

显然有

$$L^+ = L^- + \alpha, \tag{4.1.3}$$

$$L^* = L^x + f. \tag{4.1.4}$$

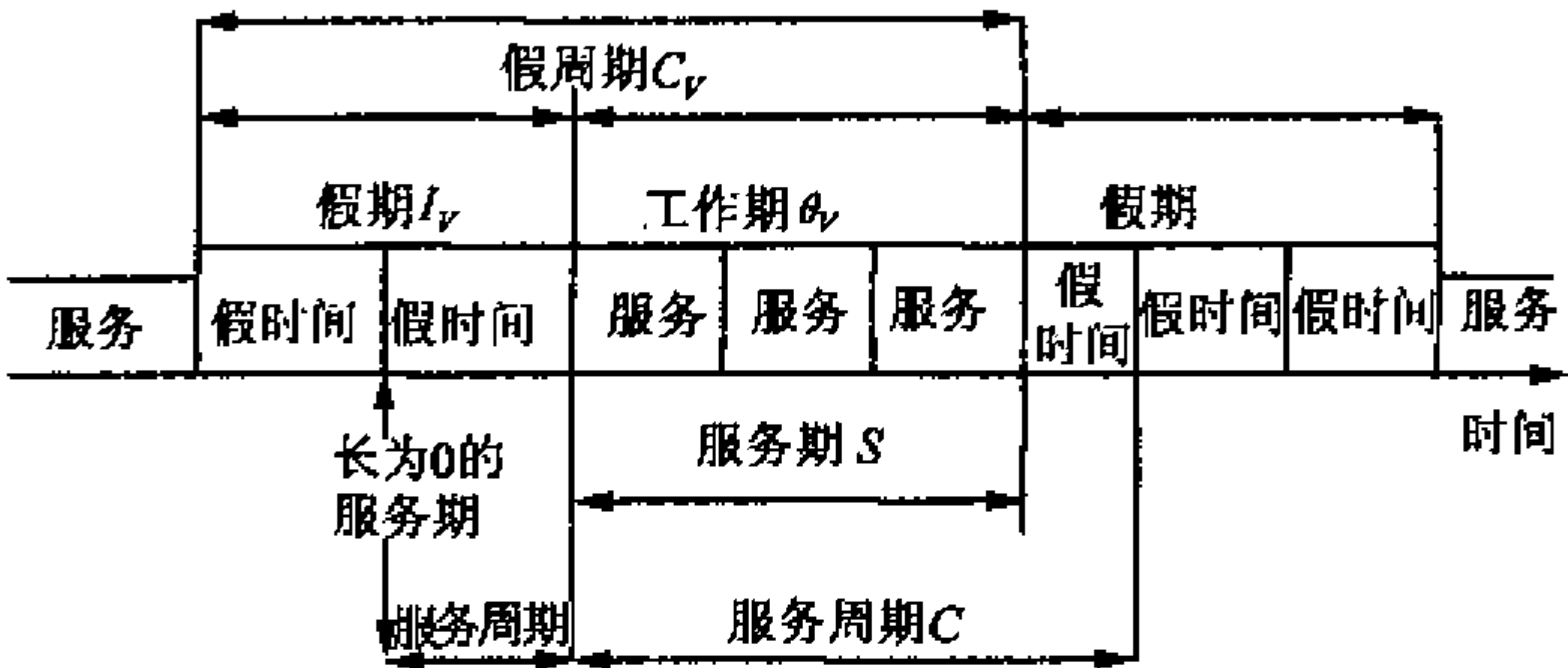


图 4-1 假时间模型术语

为了后面参考方便,上述随机变量的概率分布和其 PGF 列表如下:

随机变量	概率	母函数
$L$	$\pi_k$	$\pi(Z)$
$L^-$	没用	$H_-(Z)$
$L^+$	没用	$Q_+(Z)$
$L^x$	$h_k$	$H(Z)$
$L^*$	$q_k$	$Q(Z)$

对于具有一般假时间的  $M/G/1$  系统,作如下假设:

(1) 到达系统的信元是具有固定速率的泊松过程,服务时间相互独立同分布.这些服务时间与到达过程独立,与以前假期序列也独立.

(2) 到达系统的所有信元最后都要被服务,即系统可有无限队长容量,信元不成批,不推迟,不放弃(服务).

(3) 信元按照次列服务,这个次序与它们的服务时间独立.

(4) 服务是非抢占的,即一个信元一旦被服务就连续被服务完.

(5) 对于给定的服务员开始与结束假时间的规则不改变泊松到达过程.

## § 4.1 穷尽服务系统

### 4.1.1 具有假时间的一般模型

我们先介绍一般假时间穷尽服务,即仅当系统中无信元时假时间才开始的服务规则.由假设,因为  $L^- = 0 = L^*$ ,所以  $L^+ = \alpha$ ,  $L^* = f$ .设  $L$  为一个信元离开系统时系统中的信元数.现来求  $L$  的平稳分布:  $\{\pi_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ .

设  $B, V$  分别为服务时间与假时间,  $B, V$  的 LST、均值、 $i$  阶原点矩分别记为  $B^*(s), V^*(s), b, E(V), b^{(i)}, E(V^i)$ . 设  $L_n$  为第  $n$  个信元(顾客)离开系统时系统中的信元数,  $A_n$  为在第  $n$  个信元服务时间中到达系统的信元数,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 因为

$$L_{n+1} = \begin{cases} \alpha + A_{n+1} - 1, & L_n = 0, \\ L_n + A_{n+1} - 1, & L_n > 0, \end{cases} \quad (4.1.5)$$

所以

$$\begin{aligned} p_{jk} &\triangleq P\{L_{n+1} = k | L_n = j\} \\ &= \begin{cases} P\{\alpha + A_{n+1} - 1 = k\}, & j = 0, k \geq 0, \\ P\{j + A_{n+1} - 1 = k\}, & 0 \leq j - 1 \leq k, \\ 0, & j \geq 1, 0 \leq k < j - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m}, j=0, k \geq 0, \\ a_{k+1-j}, 0 \leq j-1 \leq k, \\ 0, j \geq 1, 0 \leq k < j-1, \end{cases} \quad (4.1.6)$$

其中

$a_m = P\{A_{n+1} = m\}$ . 由平稳方程

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

和正规方程:  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$  得

$$\pi_k = \pi_0 \sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k+1-j}, \quad (4.1.6')$$

得  $L$  的 PGF

$$\begin{aligned} \pi(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k Z^k = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m} Z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k+1-j} Z^k \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_{i+1} a_{k-i} Z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \pi_{i+1} a_{k-i} Z^k \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} a_{i+1} a_{k-i} Z^k + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i+1} Z \sum_{k=i}^{\infty} a_{k-i} Z^{k-i} \\ &= \pi_0 A(Z) \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} Z^{i+1} \frac{1}{Z} + \frac{A(Z)}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i+1} Z^{i+1} \\ &= \pi_0 \frac{A(Z)}{Z} \alpha(Z) + \frac{A(Z)}{Z} [\pi(Z) - \pi_0]. \end{aligned}$$

解之得

$$\pi(Z) = \frac{\pi_0 [\alpha(Z) - 1] A(Z)}{Z - A(Z)}, \quad (4.1.7)$$

又因  $A(Z)$  为  $N(B)$  的 PGF,

$$\begin{aligned} a_k &= P\{N(B) = k\} = \int_0^{\infty} P\{N(t) = k\} dp\{B < t\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dp\{B < t\}, \end{aligned}$$

所以



$$\begin{aligned}
A(Z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} Z^k dP\{B < t\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t Z} dP\{B < t\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-Z)t} dP\{B < t\} \\
&= B^*(\lambda - \lambda Z).
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

将(4.1.8)代入(4.1.7)得

$$\pi(Z) = \frac{\pi_0 [1 - \alpha(Z)] B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \tag{4.1.9}$$

由  $\pi(1) = 1$ , 从而得

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{E(\alpha)}, \quad \text{其中 } \rho = \lambda b. \tag{4.1.10}$$

故

$$\begin{aligned}
\pi(Z) &= \frac{(1 - \rho) [1 - \alpha(Z)] B^*(\lambda - \lambda Z)}{E(\alpha) [B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]} \\
&= \alpha_-(Z) \frac{(1 - \rho)(1 - Z) B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z},
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

其中

$$\alpha_-(Z) = \frac{1 - \alpha(Z)}{E(\alpha)(1 - Z)} \tag{4.1.12}$$

为在一个假期中到达的任一(标记)信元之前到达的信元数的 PGF. 而(4.1.11)中第二因式为无假时间的  $M/G/1$  系统一信元离开时系统中信元数的 PGF. 从而得

$$E(L) = \pi(1) = \frac{\alpha^{(2)}(1)}{2E(\alpha)} + \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1 - \rho)} + \rho. \tag{4.1.13}$$

由利特尔公式得信元平均逗留时间:

$$E(T) = E(L)/\lambda = \frac{\alpha^{(2)}(1)}{2\lambda E(\alpha)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + b. \tag{4.1.14}$$

下面讨论等待时间  $W$  的分布. 对于先来先服务规则的具有假时间的  $M/G/1$  系统, 由于

$$L = N(W) + N(B), \tag{4.1.15}$$

所以  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{\lambda(1-\rho)[1-\alpha(1-\frac{s}{\lambda})]}{E(\alpha)[\lambda B^*(s) - \lambda + s]}. \quad (4.1.16)$$

从而

$$E(W) = \frac{\alpha^{(2)}(1)}{2\lambda E(\alpha)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \quad (4.1.17)$$

$$E(W^2) = \frac{\alpha^{(3)}(1)}{3\lambda^2 E(\alpha)} + \frac{3b^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\alpha^{(2)}(1)b^{(2)}}{2(1-\rho)E(\alpha)}. \quad (4.1.18)$$

现考虑工作期的分布. 设  $\theta_v, I_v$  分别为上述系统的工作期与假期的长,  $Q_v^*(s), I_v^*(s)$ , 分别为  $\theta_v, I_v$  的 LST. 则服务员在工作的概率为

$$E(\theta_v)/[E(\theta_v) + E(I_v)] = \rho. \quad (4.1.19)$$

因为

$$\theta_v = \sum_{i=1}^a \theta_i, \quad (4.1.20)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  独立同分布, 均与无假时间的  $M/G/1$  系统的忙期  $\theta$  同分布. 从而有

$$\theta_v^*(s) = \alpha[\theta^*(s)]. \quad (4.1.21)$$

故

$$E(\theta_v) = E(\alpha)E(\theta) = \frac{bE(\alpha)}{1-\rho}. \quad (4.1.22)$$

由(4.1.19)得

$$E(I_v) = \frac{1-\rho}{\rho}E(\theta_v) = \frac{E(\alpha)}{\lambda}. \quad (4.1.23)$$

由于服务期  $S$  为  $S = \sum_{i=1}^f \theta_i$ , 所以  $S$  的 LST 为

$$S^*(s) = F[\theta^*(s)], \quad (4.1.24)$$

且

$$E(S) = \frac{bE(f)}{1-\rho}. \quad (4.1.25)$$

因为

$$\frac{E(S)}{E(S) + E(V)} = \rho, \quad (4.1.26)$$

所以

$$E(V) = \frac{E(f)}{\lambda}. \quad (4.1.27)$$

由(4.1.19)知

$$\pi_0 \equiv P\{\text{系统空}\} < P\{\text{服务员在度假}\} = 1 - \rho. \quad (4.1.28)$$

此示服务员在度假并不意味着系统空.

设  $\Delta$  为两个连续离开间隔时间(在一个服务完成后). 则  $\Delta$  的 LST 为

$$\begin{aligned} \Delta^*(s) &= \pi_0 E[e^{-s\Delta} | \text{系统空}] + (1 - \pi_0) E[e^{-s\Delta} | \text{系统不空}] \\ &= \pi_0 I_V^*(s) B^*(s) + (1 - \pi_0) B^*(s) \\ &= B^*(s) [\pi_0 I_V^*(s) + 1 - \pi_0], \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

且

$$E(\Delta) = \pi_0 E[I_V + B] + (1 - \pi_0) E(B) = \pi_0 E(I_V) + b = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.1.30)$$

#### 4.1.2 多假时间模型

设每次假时间开始时系统为空. 如果假时间结束时系统不空, 服务员立即开始服务, 一直到系统中又无信元为止. 如果假时间结束时系统仍为空, 服务员立即开始度另一个假时间, 并且连续如此一直到某假时间结束时系统至少有一个信元为止, 这就是多假时间模型. 并设每个假时间与到达过程独立. 用  $V^*(s)$  表示假时间  $V$  的 LST. 因为

$$F(z) = E[Z^{N(V)}] = V^*(\lambda - \lambda Z), \quad (4.1.31)$$

所以

$$f_0 \equiv P\{f=0\} = V^*(\lambda). \quad (4.1.32)$$

又因

$$\begin{aligned} F(Z) &= f_0 E(Z^f | f=0) + (1-f_0) E(Z^f | f>0) \\ &= f_0 + (1-f_0) E(Z^a) = f_0 + (1-f_0) \alpha(Z), \end{aligned}$$

所以

$$\alpha(Z) = \frac{V^*(\lambda - \lambda Z) - V^*(\lambda)}{1 - V^*(\lambda)} = \frac{F(Z) - f_0}{1 - f_0}, \quad (4.1.33)$$

$$E(\alpha) = \frac{E(f)}{1 - f_0} = \frac{\lambda E(V)}{1 - f_0}, \quad (4.1.34)$$

$$\alpha_-(Z) = \frac{1 - \alpha(Z)}{(1 - Z)E(\alpha)} = \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda(1 - Z)E(V)}. \quad (4.1.35)$$

由(4.1.35)与(4.1.11)得

$$\pi(Z) = \frac{(1-\rho)[1 - V^*(\lambda - \lambda Z)]B^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]}, \quad (4.1.36)$$

从而

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)[1 - V^*(s)]}{E(V)[s - \lambda + \lambda B^*(s)]} = V_-^*(s) W_{M/G/1}^*(s), \quad (4.1.37)$$

其中

$$V_-^*(s) = \frac{1 - V^*(s)}{sE(V)}, \quad (4.1.38)$$

$$W_{M/G/1}^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}, \quad (4.1.39)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \quad (4.1.40)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\lambda b^{(2)} E(V^2)}{2(1-\rho)E(V)} + \frac{E(V^3)}{3E(V)}. \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

由(4.1.21)与(4.1.33)得

$$\theta_V^*(s) = \frac{V^*[\lambda - \lambda \theta^*(s)] - V^*(\lambda)}{1 - V^*(\lambda)}, \quad (4.1.42)$$

且

$$E(\theta_V) = \frac{\rho E(V)}{(1-\rho)[1 - V^*(\lambda)]}. \quad (4.1.43)$$

一个服务期长度  $S$  的 LST 为

$$S^*(s) = F[\theta^*(s)] = V^*[\lambda - \lambda\theta^*(s)], \quad (4.1.44)$$

且

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^f \theta_i\right) = E(f)E(\theta) = \frac{\rho E(V)}{1-\rho}. \quad (4.1.45)$$

假期长度  $I_V$  的 LST 为

$$\begin{aligned} E(e^{-sI_V}) &= E[E(e^{-sI_V} | V_1, V_2, V_3, \dots)] \\ &= E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} E[e^{-s(V_1+V_2+\dots+V_n)} | V_1, V_2, V_3, \dots] \right. \\ &\quad \cdot P\{I_V = V_1 + V_2 + \dots + V_n | V_1, V_2, V_3, \dots\} \Big\} \\ &= E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(V_1+V_2+\dots+V_n)} \cdot e^{-\lambda(V_1+\dots+V_{n-1})}(1 - e^{-\lambda V_n})\right\} \\ &= \frac{V^*(s) - V^*(s+\lambda)}{1 - V^*(s+\lambda)}, \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

且

$$E(I_V) = \frac{E(V)}{1 - V^*(\lambda)}. \quad (4.1.47)$$

### 4.1.3 单假时间模型

现考虑单假时间穷尽服务  $M/G/1$  系统. 它与上一小节的区别是: 如果假时间结束时系统是空的, 服务员将处于空闲(而不是度一个假时间)一直到有一个信元到达为止. 当一个信元到达时服务员将立即为它服务, 一直到系统空才去度另一个假时间. 这样的模型被称单假时间穷尽服务  $M/G/1$  系统.

对这样的模型, 在一个假时间中, 如果没有信元到达, 服务开始时系统中将只有一信元, 如果有信元到达,  $\alpha$  将与  $f$  相等. 于是有

$$\begin{aligned} \alpha(Z) &= E(Z^\alpha) = f_0 E(Z^\alpha | f=0) + \sum_{m=1}^{\infty} E(Z^\alpha | f=m) f_m \\ &= f_0 E(Z) + \sum_{m=1}^{\infty} E(Z^f | f=m) f_m = f_0 Z + F(Z) - f_0. \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

将上式代入(4.1.11)得一信元离开时系统中信元数的 PGF:

$$\pi(Z) = \frac{1-\rho}{f_0 + E(f)} \cdot \frac{[1 - F(Z) + (1-Z)f_0]B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.1.49)$$

因为这时

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= f_0 E(\alpha | f = 0) + \sum_{m=1}^{\infty} E(\alpha | f = m) f_m \\ &= f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} E(f | f = m) f_m = f_0 + E(f). \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

由(4.1.31)与(4.1.16)得信元等待时间的 LST:

$$W^*(s) = \frac{1-\rho}{V^*(\lambda) + \lambda E(V)} \cdot \frac{\lambda - \lambda V^*(s) + sV^*(\lambda)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}, \quad (4.1.51)$$

且

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E(V^2)}{2[V^*(\lambda) + \lambda E(V)]}, \quad (4.1.52)$$

$$E(W^2) = \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda E(V^3)}{3[V^*(\lambda) + \lambda E(V)]} + \frac{\lambda b^{(2)} E(W)}{1-\rho}, \quad (4.1.53)$$

比较(4.1.52)与(4.1.40)两式知单假时间模型的平均等待时间比多假时间模型的平均等待时间小些. 单假时间模型的工作期的 LST 为

$$\begin{aligned} \theta_V^*(s) &= E(e^{-s\theta_V}) = \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{-s\theta_V} | f = m] f_m \\ &= f_0 E(e^{-s\theta}) + \sum_{m=1}^{\infty} E[e^{-s(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m)}] f_m \\ &= V^*(\lambda) \theta^*(s) + \sum_{m=1}^{\infty} [\theta^*(s)]^m f_m \\ &= V^*(\lambda) \theta^*(s) + F[\theta^*(s)] - f_0 \\ &= V^*(\lambda) [\theta^*(s) - 1] + V^*[\lambda - \lambda \theta^*(s)], \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

且

$$E(\theta_V) = \frac{b[V^*(\lambda) + \lambda E(V)]}{1 - \rho}. \quad (4.1.55)$$

#### 4.1.4 批到达系统

设每次到达  $\xi$  个信元.  $r, \sigma_r^2, R(Z)$  分别为  $\xi$  的均值、方差、PGF. 则对于多假时间  $M^\xi/G/1$  系统, 由(3.3.48)与(4.1.37)信元等待时间  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{1 - V^*(s)}{sE(V)} \cdot \frac{s(1 - \rho)}{s - \lambda + \lambda R[B^*(s)]} \cdot \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]},$$

$$\rho = \lambda r b, \quad (4.1.56)$$

且

$$E(W) = \frac{\lambda r b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{r^{(2)} b}{2r(1 - \rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)},$$

$$r^{(2)} = E[\xi(\xi - 1)]. \quad (4.1.57)$$

而对于单假时间  $M^\xi/G/1$  系统, 由(3.3.48)与(4.1.51)信元等待时间  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{1 - \rho}{V^*(\lambda) + \lambda E(V)} \cdot \frac{\lambda - \lambda V^*(s) + sV^*(\lambda)}{s - \lambda + \lambda R[B^*(s)]}$$

$$\cdot \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]}, \quad (4.1.58)$$

且

$$E(W) = \frac{\lambda r b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{r^{(2)} b}{2r(1 - \rho)} + \frac{\lambda E(V^2)}{2[V^*(\lambda) + \lambda E(V)]}, \quad (4.1.59)$$

其中

$$r^{(2)} = E[\xi(\xi - 1)], b^{(2)} = E(B^2).$$

## § 4.2 门限服务系统

这一节我们考虑具有假时间的门限服务  $M/G/1$  系统. 门限服务是指: 当假时间结束时服务员只对正在等待的信元进行服务.

而对在服务期间到达的信元留到下一假时间以后再进行服务,为了后面的需要先来介绍再生周期中的队长.

#### 4.2.1 一个在再生周期中的队长

设  $L$  为一般服务系统中一个信元离开时系统中的信元数,  $\Phi$  为在一个服务期中服务完的信元数. 从一个假时间结束(服务期开始)时起到下一个假时间结束(服务期开始)时止这段时间称为一个服务周期, 记为  $C$ . 如果在一个服务周期开始时系统是空的, 则称该时刻为系统的再生点, 两个相继再生点之间的时间间隔称为一个再生周期. 对于一般服务系统, 再生周期的长是独立同分布的, 而服务周期的长却不一定是独立同分布的.

设  $X(t)$  为在时刻  $t$  之前再生点的个数( $t$  的原点设为第 0 个再生点, 0 不记入再生点中). 设  $Y_k$  为第  $k$  个再生周期的“报酬”, 且  $E(Y_k) = E(Y_1)$ . 则到时刻  $t$  所得报酬为

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{X(t)} Y_k, \quad (4.2.1)$$

称  $Y(t), t \geq 0$  为一个更新报酬过程. 由更新报酬过程理论, 有如下结论:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[Y(t)]}{t} = \frac{E(Y_1)}{\mu}, \quad (4.2.2)$$

且以概率 1 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{t} = \frac{E(Y_1)}{\mu}, \quad (4.2.3)$$

其中  $\mu$  为再生周期平均长.

设  $M_k$  为第  $k$  个再生周期中服务周期的个数,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $X(t)$ .  $\Phi_{m_k}$  为第  $m_k$  个服务周期服务完的信元数,  $m_k = 1, 2, \dots, M_k$ . 设  $t_{m_k}^{n_{m_k}}$  为在第  $k$  个再生周期中的第  $m_k$  个服务周期中第  $n_{m_k}$  个服务被完成的时刻. 并设  $L(t)$  为时刻  $t$  系统中的信元数. 则  $L$  的 PGF 为



$$\begin{aligned}
\pi(Z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left\{ \sum_{k=1}^{X(t)} \sum_{m_k=1}^{M_k} \sum_{n_{m_k}=1}^{\Phi_{m_k}} Z^L [t_{m_k}^{(n_{m_k})}] \right\}}{E \left[ \sum_{k=1}^{X(t)} \sum_{m_k=1}^{M_k} \Phi_{m_k} \right]} \\
&= \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left\{ \sum_{k=1}^{X(t)} \sum_{m_k=1}^{M_k} \sum_{n_{m_k}=1}^{\Phi_{m_k}} Z^L [t_{m_k}^{(n_{m_k})}] \right\}}{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[ \sum_{k=1}^{X(t)} \sum_{m_k=1}^{M_k} \Phi_{m_k} \right]} \\
&= \frac{E \left[ \sum_{m=1}^M \sum_{n_m=1}^{\Phi_m} Z^{L(t_{m}^{n_m})} \right]}{E \left[ \sum_{m=1}^M \Phi_m \right]}. \tag{4.2.4}
\end{aligned}$$

由于再生周期长 i.i.d, 故删去  $k$ , 且可合理的定义

$$E(\Phi) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{E[\Phi_m]}{n}. \tag{4.2.5}$$

再由(4.2.2) 得

$$E(\Phi) = \frac{E \left[ \sum_{m=1}^M \Phi_m \right]}{E(M)}. \tag{4.2.6}$$

类似地

$$E \left( \sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \right) = E \left[ \sum_{m=1}^M \sum_{n_m=1}^{\Phi_m} Z^{L(t_{m}^{n_m})} \right] / E(M). \tag{4.2.7}$$

从而得

$$\pi(Z) = E \left[ \sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \right] / E(\Phi). \tag{4.2.8}$$

对于泊松到达过程, (4.2.8) 也是任一时刻系统中信元数的 PGF, 且(4.2.8) 不仅对门限服务系统成立, 而且对穷尽服务系统非穷尽服务系统也成立.

### 4.2.2 多假时间模型

设各假时间长仍为独立同分布随机变量,  $L^*$  为每个假时间结束时系统中的信元数,  $Q(Z)$  为  $L^*$  的 PGF. 因为

$$L^* = L^\times + f, \quad (4.2.9)$$

设  $L^\times$  与  $f$  独立,  $H(Z)$  为  $L^\times$  的 PGF. 则

$$Q(Z) = H(Z)F(Z).$$

对于门限服务, 因为在一个服务期中一个服务期中服务的顾客数  $\Phi$  等于假时间结束时系统中的顾客数  $L^*$ , 即

$$\Phi = L^*, \quad (4.2.10)$$

故

$$E(\Phi) = E(L^*) + Q'(1). \quad (4.2.11)$$

设  $L_n$  为在一个服务期中第  $n$  个信元离开时系统中的信元数,  $A_n$  为第  $n$  个服务时间中到达的信元数, 则

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \cdots + A_n - n, n = 1, 2, \cdots, L^*, \quad (4.2.12)$$

其中各个  $A_n$  是独立同分布的, 且

$$E(Z^{A_n}) = E[Z^{N(B_n)}] = B^*(\lambda - \lambda Z). \quad (4.2.13)$$

从而得

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] &= E\left\{E\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n} \cdot Z^{A_1+A_2+\cdots+A_n} \mid L^*\right\} \\ &= E\left\{\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n} E[Z^{A_1+A_2+\cdots+A_n}]\right\} \\ &= E\left\{\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n\right\} \\ &= E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)]^{L^*} - Z^{L^*}\} \cdot \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\ &= \frac{\{Q[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z)\} B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

将(4.2.11)与(4.2.14)代入(4.2.8)得

$$\pi(Z) = \frac{\{Q[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z)\}B^*(\lambda - \lambda Z)}{Q'(1)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]} \quad (4.2.15)$$

且

$$E(L) = \pi'(1) = \rho + \frac{(1 + \rho)Q''(1)}{2Q'(1)}. \quad (4.2.16)$$

对于先来先服务规则, 信元等待时间  $W$  的 LST 为

$$W_{\text{FCFS}}^*(s) = \frac{\lambda \{Q[B^*(s)] - Q(1 - s/\lambda)\}}{Q'(1)[s - \lambda + \lambda B^*(s)]}, \quad (4.2.17)$$

且

$$E(W) = \frac{(1 + \rho)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)}, \quad (4.2.18)$$

$$E(W^2) = \frac{(1 + \rho + \rho^2)Q'''(1)}{3\lambda^2 Q'(1)} + \frac{b^{(2)}Q''(1)}{2Q'(1)}. \quad (4.2.19)$$

现来确定  $Q(Z)$ . 由于服务是门限的, 所以  $S = \sum_{i=1}^{L^*} B_i$ , 故

$$S^*(s) = Q[B^*(s)]. \quad (4.2.20)$$

又因  $L^*$  的 PGF 为

$$H(Z) = S^*(\lambda - \lambda z), \quad (4.2.21)$$

以及

$$F(Z) = V^*(\lambda - \lambda z), \quad (4.2.22)$$

又  $L^*$  与  $f$  独立, 所以

$$Q(Z) = H(Z)F(Z) = Q[B^*(\lambda - \lambda Z)]V^*(\lambda - \lambda z). \quad (4.2.23)$$

从而

$$E(L^*) = Q'(1) = \frac{\lambda E(V)}{1 - \rho}, \quad (4.2.24)$$

$$E(S) = bE(L^*) = \frac{\rho E(V)}{1 - \rho}. \quad (4.2.25)$$

将(4.2.24)代入(4.2.15)与(4.2.17)得

$$\pi(Z) = \frac{(1 - \rho)\{Q[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z)\}B^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]}$$

$$= \pi_{M/G/1}(Z) \cdot \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1 - Z)} \cdot Q[B^*(\lambda - \lambda Z)], \quad (4.2.26)$$

$$W_{FCFS}^*(S) = W_{M/G/1}^*(S) \cdot \frac{1 - V^*(S)}{SE(V)} \cdot Q[B^*(S)], \quad (4.2.27)$$

其中

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z},$$

$$W_{M/G/1}^*(S) = \frac{S(1 - \rho)}{S - \lambda + \lambda B^*(S)}.$$

由(4.2.23)与(4.2.16)可得

$$E(L) = \rho + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda \rho E(V)}{1 - \rho}. \quad (4.2.28)$$

由(4.2.18), (4.2.19)与(4.2.23)可得

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\rho E(V)}{1 - \rho}, \quad (4.2.29)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1 - \rho)} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda b^{(2)} E(V^2)}{2(1 - \rho)E(V)} + \frac{E(V^3)}{3E(V)} \\ &\quad + \frac{(1 + \rho + \rho^2)\lambda E(V)b^{(2)}}{(1 - \rho)(1 - \rho^2)} + \frac{\rho(1 + 2\rho)E(V^2)}{1 - \rho^2}. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

注意:有如下关系式

$$E(W)_{\text{gated}} = E(W)_{\text{exhaustive}} + E(S). \quad (4.2.31)$$

设  $C^*(S)$  为服务周期长  $C$  的 LST. 因为  $L^* = N(C)$ , 所以

$$Q(Z) = C^*(\lambda - \lambda Z). \quad (4.2.32)$$

由(4.2.23)得

$$\begin{aligned} C^*(s) &= Q(1 - s/\lambda) = Q[B^*(s)]V^*(s) \\ &= C^*[\lambda - \lambda B^*(s)]V^*(s), \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

且

$$E(C) = \frac{E(L^*)}{\lambda} = \frac{E(V)}{1 - \rho} = E(s) + E(V). \quad (4.2.34)$$

从而(4.2.27)变为

$$W_{\text{FCFS}}^*(s) = \frac{C^*[\lambda - \lambda B^*(s)] - C^*(s)}{E(C)[s - \lambda + \lambda B^*(s)]}, \quad (4.2.35)$$

且

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{(1 + \rho)E(C^2)}{2E(C)} \\ E(W^2) &= \frac{(1 + \rho + \rho^2)E(C^3)}{3E(C)} + \frac{\lambda b^{(2)}E(C^2)}{2E(C)}, \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

其中  $E(C^i) = \frac{1}{\lambda^i} Q^i(1)$  由 (4.2.32) 确定.

### 4.2.3 单假时间模型

在这个模型中服务员在每个工作期后只休一个假时间,在这个假时间结束时,如果系统不空他将立即开始服务,如果系统空,他将处于空闲期,一直到有信元到达为止. 设,  $L^-, L^+$  分别为前一个工作期结束时和前一个假期结束时系统中的信元数, 因为  $L^+ = L^- + \alpha =$

$N\left(\sum_{i=1}^{L^+} B_i\right) + \alpha$  且  $L^-$  与  $\alpha$  独立, 设  $Q_+(Z)$  为  $L^+$  的 PGF, 所以

$$\begin{aligned} Q_+(Z) &= E[Z^{L^+}] = E[Z^{L^- + \alpha}] = E[Z^{L^-}] \alpha(Z) = E[Z^{N(S)}] \alpha(Z) \\ &= E\left\{Z^{N\left(\sum_{i=1}^{L^+} B_i\right)}\right\} \alpha(Z) \\ &= Q_+[B^*(\lambda - \lambda Z)] \alpha(Z) \quad \text{由 (4.1.48)} \\ &= Q_+[B^*(\lambda - \lambda Z)][V^*(\lambda - \lambda Z) - V^*(\lambda) \\ &\quad + ZV^*(\lambda)]. \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

故

$$E(L^*) = E(L^+) = Q'_+(1) = \frac{V^*(\lambda) + \lambda E(V)}{1 - \rho}, \quad (4.2.38)$$

$$E(S) = bE(L^*) = bE(L^+) = \frac{b[V^*(\lambda) + \lambda E(V)]}{1 - \rho}. \quad (4.2.39)$$

### 4.2.4 伯努利门限服务多假时间模型

现在我们考虑多假时间伯努利门限服务  $M/G/1$  系统. 伯努

利门限服务是指：每次假时间结束时服务员服务的信元数  $\Phi \sim B(L^*, p)$ ，其中  $0 < p \leq 1$ ， $L^*$  为该假时间结束时系统中的信元数。即

$$p \{ \Phi = k | L^* \} = C_L^k \cdot p^k (1-p)^{L^*-k}, \quad k=0,1,2,\dots,L^*. \quad (4.2.40)$$

设  $L_n^*$  为第  $n$  个假时间结束时（第  $n+1$  个服务期开始时）系统中的信元数。于是有

$$L_{n+1}^* = L_n^* + A_1 + A_2 + \dots + A_\Phi - \Phi + N(V_{n+1}). \quad (4.2.41)$$

所以

$$E(ZL_{n+1}^*) = V^* (\lambda - \lambda Z) E \{ E[Z^{L_n^* + A_1 + \dots + A_\Phi - \Phi} | L_n^*] \}, \quad (4.2.42)$$

而

$$\begin{aligned} E[Z^{L_n^* + A_1 + \dots + A_\Phi - \Phi} | L_n^*] &= Z^{L_n^*} \sum_{k=0}^{L_n^*} E[Z^{A_1 + A_2 + \dots + A_k - k} | L_n^*, \\ &\Phi = k] p \{ \Phi = k | L_n^* \} = Z^{L_n^*} \sum_{k=0}^{L_n^*} Z^{-k} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^k C_{L_n^*}^k \cdot p^k (1-p)^{L_n^*-k} \\ &= Z^{L_n^*} \left[ \frac{1}{Z} p B^*(\lambda - \lambda Z) + 1 - p \right]^{L_n^*} = [p B^*(\lambda - \lambda Z) + (1-p)Z]^{L_n^*}. \end{aligned}$$

将上式代入(4.2.42)，令  $n \rightarrow \infty$ ，记  $Q(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z^{L_n^*})$ 。得

$$Q(Z) = Q[p B^*(\lambda - \lambda Z) + (1-p)Z] V^*(\lambda - \lambda Z) \quad (4.2.43)$$

且

$$E(L^*) = Q'(1) = \frac{\lambda E(V)}{p(1-\rho)}, \quad (4.2.44)$$

$$E(\Phi) = E\{E(\Phi | L^*)\} = E\{pL^*\} = \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \quad (4.2.45)$$

因为

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \dots + A_n - n, \quad n=1,2,\dots,\Phi,$$

所以

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \mid \Phi\right] &= \sum_{n=1}^{\Phi} E[Z^{L^*} \mid \Phi] Z^{-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n \\
&= E\left\{\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n Z^{L^*} \mid \Phi\right\} \\
&= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\
&\quad \cdot E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)/Z]^{\Phi} Z^{L^*} - Z^{L^*} \mid \Phi\}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)/Z]^{\Phi} Z^{L^*} - Z^{L^*}\} \\
&= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} E\left\{\left[\frac{pB^*(\lambda - \lambda Z)}{Z} + 1 - p\right]^{L^*} Z^{L^*} - Z^{L^*}\right\} \\
&= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1 - p)Z] - Q(Z)\}.
\end{aligned} \tag{4.2.46}$$

将(4.2.45)与(4.2.46)代入(4.2.8)得一信元离开系统时系统中信元数  $L$  的 PGF:

$$\begin{aligned}
\pi(Z) &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{pQ'(1)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]} \\
&\quad \cdot \{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1 - p)Z] - Q(Z)\} \\
&= \frac{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1 - p)Z] - Q(Z)}{pQ'(1)(1 - \rho)(1 - Z)} \cdot \pi_{M/G/1}(Z).
\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

由此得

$$E(L) = \rho + \frac{(2 - \rho + p\rho)Q''(1)}{2Q'(1)}, \tag{4.2.48}$$

且(先来先服务)等待时间  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{\lambda \{Q[pB^*(s) + (1 - p)(1 - s/\lambda)] - Q(1 - s/\lambda)\}}{pQ'(1)[s - \lambda + \lambda B^*(s)]}. \tag{4.2.49}$$

从而

$$E(W) = \frac{(2-p+p\rho)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)}. \quad (4.2.50)$$

由(4.2.43)得

$$Q''(1) = \frac{E(V)\lambda^3 b^{(2)} + 2\lambda^2[E(V)]^2\rho}{p(1-\rho)^2[2-p+p\rho]} + \frac{2(1-p)\lambda^2[E(V)]^2}{p^2(1-\rho)^2[2-p+p\rho]} + \frac{\lambda^2 E(V^2)}{p(1-\rho)[2-p+p\rho]}. \quad (4.2.51)$$

由(4.2.50), (4.2.51)与(4.2.44)得

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\rho E(V)}{(1-\rho)} + \frac{(1-p)E(V)}{p(1-\rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)}. \quad (4.2.52)$$

当  $p=1$  时, 上式就变为(4.2.29)式.

#### 4.2.5 具有伯努利反馈的多假时间模型

在多假时间门限服务  $M/G/1$  系统中, 设每信元被服务完后以概率  $1-\sigma$  ( $0 < \sigma \leq 1$ ) 立即排列队尾(在下个假时间后它将被服务), 而以概率  $\sigma$  离开系统. 对于这样的系统, 记  $L^*$  的 PGF 为  $Q(Z)$ ,  $L_n^*$  为第  $n$  个假时间结束时系统中的信元数. 易见

$$Q(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z^{L_n^*}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z^{L_{n+1}^*}).$$

设

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 个信元反馈,} \\ 0, & \text{第 } k \text{ 个信元不反馈,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, L_n^*.$$

则有

$$L_{n+1}^* = N\left(\sum_{k=1}^{L_n^*} B_k\right) + \sum_{k=1}^{L_n^*} Y_k + N(V), \quad (4.2.53)$$

且

$$\begin{aligned} E(Z^{L_{n+1}^*}) &= V^*(\lambda - \lambda Z) E\left[Z^{N(\sum_{k=0}^{L_n^*} B_k) + \sum_{k=0}^{L_n^*} Y_k}\right] \\ &= V^*(\lambda - \lambda Z) E\left\{E\left[Z^{N(B_1+B_2+\dots+B_{L_n^*}) + Y_1+\dots+Y_{L_n^*}} \mid L_n^*\right]\right\} \\ &= V^*(\lambda - \lambda Z) E\left\{[B^*(\lambda - \lambda Z)]^{L_n^*} [(1-\sigma)Z + \sigma]^{L_n^*}\right\} \end{aligned}$$



$$= E \{ [B^*(\lambda - \lambda Z)(Z - \sigma Z + \sigma)]^{L^*} | V^*(\lambda - \lambda Z) \}. \quad (4.2.54)$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$Q(Z) = Q \{ B^*(\lambda - \lambda Z)[(1 - \sigma)Z + \sigma] \} V^*(\lambda - \lambda Z), \quad (4.2.55)$$

且

$$E(\Phi) = E(L^*) = Q'(1) = \frac{\lambda E(V)}{\sigma - \lambda b}, \quad (4.2.56)$$

$$Q''(1) = \frac{\lambda E(V)[\lambda^2 b^{(2)} + 2\lambda b(1 - \sigma)] + 2\lambda^2 [E(V)]^2 (1 - \sigma + \lambda b)}{(\sigma - \lambda b)^2 (2 - \sigma + \lambda b)} + \frac{\lambda^2 E(V^2)}{(\sigma - \lambda b)(2 - \sigma + \lambda b)}. \quad (4.2.57)$$

因为在第  $n$  个信元服务完成后系统中的信元数  $L_n$  为

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \cdots + A_n - n + \sum_{k=1}^n Y_k. \quad (4.2.58)$$

因此

$$E(Z^{L_n} | L^*) = Z^{L^* - n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n [(1 - \sigma)Z + \sigma]^n.$$

所以

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} Z^{L_n} \right] &= E \left[ \sum_{n=1}^{L^*} Z^{L_n} \right] \\ &= E \left\{ \sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*} \left[ \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{Z} (\sigma + Z - \sigma Z) \right]^n \right\} \\ &= \frac{[\sigma + (1 - \sigma)Z] B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z)[\sigma + (1 - \sigma)Z] - Z} \\ &\quad \cdot \{ Q[(\sigma + Z - \sigma Z) B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z) \}. \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

将(4.2.59)与(4.2.56)代入(4.2.8)得

$$\begin{aligned} \pi(Z) &= \frac{[\sigma + Z - \sigma Z] B^*(\lambda - \lambda Z)}{[(\sigma + Z - \sigma Z) B^*(\lambda - \lambda Z) - Z] Q'(1)} \\ &\quad \cdot \{ Q[(\sigma + Z - \sigma Z) B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z) \}. \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

设  $\pi_g(Z)$  为一个信元最后离开系统时系统中信元数的 PGF. 类似于(3.5.13)式得

$$\pi(Z) = [\sigma + (1 - \sigma)Z] \pi_g(Z). \quad (4.2.61)$$

所以

$$\begin{aligned} \pi_g(Z) &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{E(L^*)[(\sigma + Z - \sigma Z)B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]} \\ &\quad \cdot \{Q[(\sigma + Z - \sigma Z)B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z)\} \\ &= \pi_{g, M/G/1}(Z) \cdot x(Z), \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

$$\text{其中 } \pi_{g, M/G/1}(Z) = \frac{(\sigma - \lambda b)(1 - Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{(\sigma + Z - \sigma Z)B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}, \quad (4.2.63)$$

相应于无假时间具有伯努利反馈的  $M/G/1$  系统信元服务完离开系统时(既任意时刻)系统中信元数的 PGF. 而

$$x(Z) = \frac{Q\{[\sigma + (1 - \sigma)Z]B^*(\lambda - \lambda Z)\} - Q(Z)}{\lambda E(E)(1 - Z)} \quad (4.2.64)$$

为在假时间中任一时刻系统中信元数的 PGF. 由(4.2.63)与利特尔公式得信元平均逗留时间:

$$\begin{aligned} E(T_g) &= \pi'_g(1)/\lambda \\ &= \frac{2(1 - \lambda b)b + \lambda b^{(2)}}{2(\sigma - \lambda b)} + \frac{(1 - \sigma + \lambda b)E(V)}{\sigma - \lambda b} + \frac{E(V^2)}{2E(V)}. \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

上式右边第一项为无假时间  $M/G/1$  系统的信元平均逗留时间. 第二项乘  $\lambda$  等于  $(1 - \sigma + \lambda b)E(\Phi)$  为假期结束时系统中的平均信元数. 第三项是平均剩余假时间.

#### 4.2.6 LCFS 多假时间模型

(1) 穷尽服务. 设  $W$  为一个信元的等待时间. 因为对于穷尽服务有

$$W = \begin{cases} \beta_V + \sum_{i=1}^{N(\beta_V)} \theta_i, & \text{当该信元在假时间到达,} \\ \beta_B + \sum_{i=1}^{N(\beta_B)} \theta_i, & \text{当该信元在服务期到达,} \end{cases} \quad (4.2.66)$$

其中  $\beta_V, \beta_B$  分别为  $V, B$  的剩余时间. 故由(4.2.28)式  $W$  的 LST 为

$$\begin{aligned} W^*(s) &= (1-\rho)E(e^{-sW} | \text{假时到达}) + \rho E(e^{-sW} | \text{服务时到达}) \\ &= (1-\rho) \cdot \frac{1-V^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(V)} + \rho \frac{1-B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(B)} \\ &= \frac{(1-\rho)\{1-V^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]\}}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(V)} + \frac{\lambda[1-\theta^*(s)]}{s+\lambda-\lambda\theta^*(s)}. \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

从而

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)}, \quad (4.2.68)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)^2} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^3} + \frac{\lambda b^{(2)}E(V^2)}{2(1-\rho)^2E(V)} \\ &\quad + \frac{E(V^3)}{3(1-\rho)E(V)}. \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

(2) 门限服务. 因为对于门限服务, 有

$$W = \beta_C + \sum_{i=0}^{N(\beta_C)} B_i, \quad (4.2.70)$$

其中  $\beta_C$  为服务周期  $C$  的剩余时间, 所以  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{1-C^*[s+\lambda-\lambda B^*(s)]}{E(C)[s+\lambda-\lambda B^*(s)]}, \quad (4.2.71)$$

其中  $C^*(s)$  满足(4.2.33), 从而

$$E(W) = \frac{(1+\rho)E(C^2)}{2E(C)}, \quad (4.2.72)$$

$$E(W^2) = \frac{(1+\rho)^2 E(C^3)}{3E(C)} + \frac{\lambda b^{(2)} E(C^2)}{2E(C)},$$

其中  $E(C^i) = Q^{(i)}(1)/\lambda^i, i=1,2,3,\dots$ , 由(4.2.32)给出.

### § 4.3 有限服务系统

在有限服务系统中, 在一个服务期中服务的信元数是有限的. 有时候服务期的长度是有限的. 有限服务可以分成很多种类. 我们

这里仅介绍其中常见的比较简单的几种.

### 4.3.1 多假时间纯有限服务系统

(1) 在多假时间纯有限服务系统中, 服务员每服务一个信元就度一个假时间. 当假时间结束时, 如果系统中没有信元服务员将度另一个假时间. 就这样一直到某个假时间结束时系统中有信元他才又开始工作. 设  $V^*(s)$  为假时间长度  $V$  的 LST, 各假时间独立同分布.  $W$  为信元的等待时间.  $W^*(s)$  为  $W$  的 LST, 则对于多假时间纯有限服务的 FCFS(先来先服务)  $M/G/1$  系统, 可以视为具有服务时间  $B + V$  的多假时间穷尽服务的 FCFS  $M/G/1$  系统, 由(4.1.37)得

$$W^*(s) = \frac{1 - V^*(s)}{sE(V)} \cdot \frac{s[1 - \rho - \lambda E(V)]}{s - \lambda + \lambda B^*(s) V^*(s)}, \quad (4.3.1)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda[b^{(2)} + 2bE(V) + E(V^2)]}{2[1 - \rho - \lambda E(V)]}. \quad (4.3.2)$$

从而信元的平均逗留时间为

$$E(T) = E(W) + b = \frac{1 - \rho}{1 - \rho - \lambda E(V)} \left[ \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + b \right]. \quad (4.3.3)$$

上右端第二因式为多假时间穷尽服务系统信元的平均逗留时间.

(2) 现在介绍伯努利计划(Bernoulli scheduling)系统, 在这个系统中, 当服务员服务一个信元后以概率  $1 - p$  休一个假时间, 而以概率  $p$  连续服务下一个信元(如果有信元)  $0 \leq p \leq 1$ . 易见, 当  $p = 0$  时该系统即为(多假时间)纯有限服务系统. 当  $p = 1$  时该系统即为(多假时间)穷尽服务系统.

令

$$\xi = \begin{cases} V, & \text{休假,} \\ 0, & \text{不休假.} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

则  $P\{\text{休假}\} = 1 - p$ ,  $P\{\text{不休假}\} = p$ .

上述的伯努利计划系统可以视为服务时间为  $B + \xi$  的多假时

间穷尽服务系统. 易见  $B$  与  $\xi$  独立, 且

$$E(B + \xi) = b + (1 - p)E(V), \quad (4.3.5)$$

$$E(B + \xi)^2 = b^{(2)} + 2b(1 - p)E(V) + (1 - p)E(V^2), \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} E[e^{-s(B + \xi)}] &= B^*(s)E(e^{-s\xi}) \\ &= pB^*(s) + (1 - p)B^*(s)V^*(s). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

由(4.1.37)得(先来先服务规则下)信元等待时间  $W$  的 LST:

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{1 - V^*(s)}{2E(V)} \\ &\cdot \frac{s[1 - \rho - \lambda(1 - p)E(V)]}{s - \lambda + \lambda[pB^*(s) + (1 - p)B^*(s)V^*(s)]}, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

且

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{E(V^2)}{2E(V)} \\ &+ \frac{\lambda[b^{(2)} + 2b(1 - p)E(V) + (1 - p)E(V^2)]}{2[1 - \rho - \lambda(1 - p)E(V)]}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

(3) 下面我们考虑假时间不同的有限服务系统. 在这个系统中, 服务员每服务一个信元就休一个假时间  $V$ , 当该假时间结束时, 如果系统中无信元, 服务员将休一个假时间  $V_0$ . 当  $V_0$  结束时系统中仍无顾客, 服务员仍休一个假时间  $V_0$ .  $V$  可以与前一个服务时间相关, 但  $V_0$  与  $B, V$  独立. 设服务时间与其后紧接着的假时间之和为  $\delta$ ,  $\delta^*(s)$  为  $\delta$  的 LST,  $V_0^*(s)$  为  $V_0$  的 LST, 则当服务规则为 FCFS 时, 信元等待时间  $W$  的 LST 为[由(4.1.37)]

$$W^*(s) = \frac{1 - V_0^*(s)}{sE(V_0)} \cdot \frac{s[1 - \lambda E(\delta)]}{s - \lambda + \lambda\delta^*(s)}, \quad (4.3.10)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V_0^2)}{2E(V_0)} + \frac{\lambda E(\delta^2)}{2[1 - \lambda E(\delta)]}. \quad (4.3.11)$$

对上述系统, 当服务规则为 LCFS 时, 由(4.2.6)式信元等待时间  $W$  的 LST 为

$$W_{\text{LCFS}}^*(s) = \frac{[1 - \lambda E(\delta)][1 - V_0^*[s + \lambda - \lambda\theta_\delta^*(s)]]}{[s + \lambda - \lambda\theta_\delta^*(s)]E(V_0)}$$

$$+ \frac{\lambda[1 - \theta_{\delta}^*(s)]}{s + \lambda - \lambda\theta_{\delta}^*(s)}, \quad (4.3.12)$$

其中  $\theta_{\delta}^*(s)$  (是  $\theta_{\delta}$  的 LST),  $\theta_{\delta}$  为服务时间为  $\delta$  的  $M/G/1$  系统的忙期)满足

$$\theta_{\delta}^*(s) = \delta^*[s + \lambda - \lambda\theta_{\delta}^*(s)]. \quad (4.3.13)$$

由(4.3.12)可得(LCFS 时)信元平均等待时间,它与(4.3.11)式相同.

注意,上述的伯努利计划系统是这样的系统:当  $V_0^*(s) = V^*(s)$  与  $\delta^*(s) = B^*(s)[p + (1-p)V^*(s)]$  时的特殊情形.

(4) 对于假时间不同的有限服务系统,如果到达是成批的,则由(4.1.56),对 FCFS 规则,信元等待时间的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{1 - V_0^*(s)}{sE(V_0)} \cdot \frac{s(1 - \rho')}{s - \lambda + \lambda R[\delta^*(s)]} \cdot \frac{1 - R[\delta^*(s)]}{r[1 - \delta^*(s)]}, \quad \rho' = \lambda r E(\delta), \quad (4.3.14)$$

从而

$$E(W) = \frac{E(V_0^2)}{2E(V_0)} + \frac{\lambda r E(\delta^2)}{2[1 - \rho']} + \frac{r^{(2)} E(\delta)}{2r(1 - \rho')}, \quad \rho' = \lambda r E(\delta). \quad (4.3.15)$$

(5) 对于单假时间纯有限服务系统(即当假时间结束时,如果系统不空,则服务立刻开始,否则服务员成为空闲一直到一个新信元到达为止),可以视为服务时间为  $B + V$  的一般  $M/G/1$  系统.由(3.2.3)式,其信元的等待时间  $W$  (FCFS)的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{s[1 - \rho - \lambda E(V)]}{s - \lambda + \lambda B^*(s) V^*(s)}, \quad (4.3.16)$$

且

$$E(W) = \frac{\lambda[b^2 + 2bE(V) + E(V^2)]}{2[1 - \rho - \lambda E(V)]}. \quad (4.3.17)$$

#### 4.3.2 最多服务 $M$ 个的有限服务系统

设  $L_n^*$  为第  $n$  个假时间结束时系统中的信元数.(在这个系统

中)在紧接第  $n$  个假时间之后的第  $n+1$  个服务期中服务员最多服务  $M$  ( $M$  是一个正整数)个信元,即在第  $n+1$  个服务期  $S_{n+1}$  中服务  $\Phi = \min(L_n^*, M)$  个信元.显然,当  $M=1$  时该系统变为纯有限服务系统;当  $M=\infty$  时该系统变为门限服务系统.

首先我们注意到,  $\{L_n^*, n=1, 2, 3, \dots\}$  是一个马氏链,且是齐

次的. 设  $D_j = V + \sum_{i=1}^j B_i$ ,  $\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 因为

$$L_{n+1}^* = (L_n^* - M)\epsilon(L_n^* - M) + N(V + \sum_{i=1}^{\Phi} B_i), \quad (4.3.18)$$

所以  $\{L_n^*, n=1, 2, 3, \dots\}$  的(一步)转移概率为

$$\begin{aligned} P_{jk} &\triangleq P\{L_{n+1}^* = k | L_n^* = j\} \\ &= \begin{cases} P\{j - M + N(D_M) = k\} = P\{N(D_M) = k - j + M\}, & k \geq j - M \geq 0, \\ P\{N(D_j) = k\}, & j < M, \\ 0, & j \geq M; \quad k < j - M \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} dP\{D_M < t\}, & k \geq j - M \geq 0, \\ \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{D_j < t\}, & j < M, \\ 0, & j \geq M, \quad k < j - M. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

从而上马氏链的平稳分布:

$$q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{L_n^* = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3.20)$$

为

$$\begin{aligned} q_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\{L_n^* = k | L_{n-1}^* = j\} P\{L_{n-1}^* = j\} \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dP\{D_j < t\} q_j \\ &\quad + \sum_{j=M}^{k+M} q_j \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} dP\{D_M < t\}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

设  $Q(Z)$  为平稳分布  $\{q_k, k=0, 1, 2, \dots\}$  的母函数, 则

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{M-1} q_j \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{D_j < t\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=M}^{k+M} q_j \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} dP\{D_M < t\} \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda Z)t} dP\{D_j < t\} \\
&\quad + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda - \lambda Z)} dP\{D_M < t\} \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j D_j^*(\lambda - \lambda Z) + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} D_M^*(\lambda - \lambda Z) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j [B^*(\lambda - \lambda Z)]^j V^*(\lambda - \lambda Z) \\
&\quad + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M V^*(\lambda - \lambda Z) \\
&= Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] V^*(\lambda - \lambda Z) \\
&\quad + \left[ \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{Z} \right]^M V^*(\lambda - \lambda Z) [Q(Z) - Q_M(Z)] \\
&= V^*(\lambda - \lambda Z) \{ Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] \\
&\quad + \left[ \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{Z} \right]^M [Q(Z) - Q_M(Z)] \}, \quad (4.3.22)
\end{aligned}$$

其中

$$Q_M(Z) = \sum_{j=0}^{M-1} q_j Z^j. \quad (4.3.23)$$

从(4.3.22)中解出  $Q(Z)$ , 得

$$Q(z) = \frac{\{Z^M Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] - [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M Q_M(Z)\} V^*(\lambda - \lambda Z)}{Z^M - V^*(\lambda - \lambda Z) [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M}. \quad (4.3.24)$$

现来求方程

$$Z^M - V^*(\lambda - \lambda Z) [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M = 0 \quad (4.3.25)$$

的根数. 在儒歇定理中, 设

$$f(z) = Z^M, g(z) = -V^*(\lambda - \lambda Z) [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M. \quad (4.3.26)$$

则对充分小的  $\epsilon > 0$ , 在  $|z| = 1 + \epsilon$  上, 有



$$\begin{aligned}
|g(z)| &= |V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)]^M| = |E[Z^{N(D_M)}]| \\
&= \left| \sum_k Z^k P\{N(D_M) = k\} \right| \leq \sum_k |Z|^k g_k \quad (g_k = p\{D_M = k\}) \\
&= \sum_k g_k (1 + \epsilon)^k = \sum_k g_k (1 + k\epsilon) + o(\epsilon) \\
&= 1 + \epsilon E[N(D_M)] + o(\epsilon) \\
&= 1 + \epsilon [\lambda E(V) + M\rho] + o(\epsilon), \tag{4.3.27}
\end{aligned}$$

$$|f(z)| = (1 + \epsilon)^M = 1 + M\epsilon + o(\epsilon). \tag{4.3.28}$$

因此,如果

$$\rho + \frac{\lambda}{M} E(V) < 1, \tag{4.3.29}$$

则在  $|z| = 1 + \epsilon$  上有  $|f(z)| > |g(z)|$ , 由儒歇定理, 在  $|z| = 1 + \epsilon$  内,  $f(z)$  与  $f(z) + g(z)$  零点个数相同. 很清楚, 在  $|z| = 1 + \epsilon$  内  $f(z)$  有  $M$  个零点. 因此, 方程 (4.3.25) 在  $|z| = 1 + \epsilon$  内有  $M$  个根.  $Z = 1$  是其中一个根. 其它  $M - 1$  根由第二章的拉格朗日定理可得到. 设

$$a = 0, \omega = e^{2\pi m j / M}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad j = \sqrt{-1}, \tag{4.3.30}$$

$$g(z) = |V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)]^M|^{\frac{1}{M}}, \quad f(z) = z. \tag{4.3.31}$$

注意: 当  $m = M$  (即对第  $M$  个根  $Z = 1$ ) 时,  $\omega = 1$ .

由拉格朗日定理, 在  $|Z| = 1$  内方程 (4.3.25) 的  $M - 1$  个根为

$$\begin{aligned}
Z_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi m n j / M}}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}} |V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)]^M|^{\frac{n}{M}} \Big|_{z=0}, \\
&\quad m = 1, 2, \dots, M-1. \tag{4.3.32}
\end{aligned}$$

因为  $Q(Z)$  在  $|z| \leq 1$  中是解析的, (4.3.24) 式右边的分子在  $Z = Z_m$  点也一定是零,  $m = 1, 2, \dots, M-1$ , 因此  $\{q_k, k = 0, 1, \dots, M-1\}$  满足如下的线性方程组:

$$\sum_{k=0}^{M-1} q_k \{ Z_m^M [B^*(\lambda - \lambda Z_m)]^k - [B^*(\lambda - \lambda Z_m)]^M Z_m^k \} = 0, \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (4.3.33)$$

另一个方程由(4.3.24)式和  $Q(1)=1$  给出:

$$Q'_M(1) = \frac{\lambda E(V)}{1-\rho} - M[1 - Q_M(1)], \quad (4.3.34)$$

即

$$\sum_{k=0}^{M-1} (M-k) q_k = M - \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \quad (4.3.35)$$

这样由(4.3.33)与(4.3.35)我们可以计算  $Q_M(z)$  的系数:

$$\{q_k, k=0, 1, \dots, M-1\},$$

由(4.3.24)与(4.3.35), 得

$$\begin{aligned} E(L^*) &= Q'(1) \\ &= \frac{\lambda^2 E(V^2) + 2\lambda E(V)[M - \lambda E(V)]}{2[M(1-\rho) - \lambda E(V)]} \\ &\quad + \frac{\lambda^3 b^{(2)} E(V)}{2(1-\rho)[M(1-\rho) - \lambda E(V)]} \\ &\quad - \frac{(1-\rho^2)\{Q_M^{(2)}(1) + M(M-1)[1 - Q_M(1)]\}}{2[M(1-\rho) - \lambda E(V)]}. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

现在来求一个信元离开时系统中信元数的 PGF  $\pi(Z)$  与信元等待时间  $W$  的 LST  $W^*(s)$ . 因为在一个服务期服务了的平均信元数为

$$\begin{aligned} E(\Phi) &= \sum_{k=1}^{M-1} k q_k + M \sum_{k=M}^{\infty} q_k \\ &= Q'_M(1) + M[1 - Q_M(1)] \quad [\text{由(4.3.34)}] \\ &= \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

设  $L_n, A_n$  如 4.2.1 所定义, 则有

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \dots + A_n - n, \quad n=1, 2, \dots, \Phi = \min(L^*, M). \quad (4.3.38)$$

故

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] &= E\left\{E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \mid L^*\right]\right\} \\
 &= E\left\{\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L^*-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{M-1} p\{L^* = k\} \sum_{n=1}^k Z^{k-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n \\
 &\quad + \sum_{k=M}^{\infty} P\{L^* = k\} \sum_{n=1}^M Z^{k-n} [B^*(\lambda - \lambda Z)]^n \\
 &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} q_k ([B^*(\lambda - \lambda Z)]^k - Z^k) \right. \\
 &\quad \left. + ([B^*(\lambda - \lambda Z)]^M - Z^M) \sum_{k=M}^{\infty} q_k Z^{k-M} \right\} \\
 &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \left\{ Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q_M(Z) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q(Z) - Q_M(Z)}{Z^M} ([B^*(\lambda - \lambda Z)]^M - Z^M) \right\} \\
 &= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \left\{ Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z) \right. \\
 &\quad \left. + [B^*(\lambda - \lambda Z)]^M \cdot \frac{Q(Z) - Q_M(Z)}{Z^M} \right\}. \quad (4.3.39)
 \end{aligned}$$

将(4.3.37)与(4.3.39)代入(4.2.8)得

$$\pi(Z) = \pi_{M/G/1}(Z).$$

$$\frac{Q_M[B^*(\lambda - \lambda Z)] + [B^*(\lambda - \lambda Z)/Z]^M [Q(Z) - Q_M(Z)] - Q(Z)}{\lambda E(V)(1-Z)}, \quad (4.3.40)$$

其中

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}.$$

由(4.3.22)得

$$\pi(Z) = \pi_{M/G/1}(Z) \alpha_-(Z) \cdot \frac{Q(Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z)}, \quad (4.3.41)$$

其中

$$\alpha_-(Z) = \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda(1 - Z)E(V)}. \quad (4.3.42)$$

当服务规则为 FCFS 时, 由 (4.3.41) 信元等待时间  $W$  的 LST  $W^*(s)$  满足

$$\pi_{M/G/1}(Z)\alpha_-(Z)\frac{Q(Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z)} = W^*(\lambda - \lambda Z)B^*(\lambda - \lambda Z).$$

从而

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{1 - \rho}{s - \lambda + \lambda B^*(s)} \cdot \frac{1 - V^*(s)}{E(V)} \cdot \frac{Q(1 - \frac{s}{\lambda})}{V^*(s)} \\ &= W_{M/G/1}^*(s) \cdot \frac{1 - V^*(s)}{sE(V)} \cdot \frac{Q(1 - s/\lambda)}{V^*(s)}, \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

而

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{E(L^*)}{\lambda} - E(V), \quad (4.3.44)$$

其中  $E(L^*)$  由 (4.3.36) 给出. 因为一个服务期的长  $S$  为

$$S = \sum_{i=0}^{\Phi} B_i, \quad \Phi = \min(L^*, M), \quad (4.3.45)$$

所以  $S$  的 LST 为

$$\begin{aligned} S^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{-s \sum_{i=1}^k B_i}) P\{\Phi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} [B^*(s)]^k P\{\Phi = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} q_k [B^*(s)]^k + \sum_{k=M}^{\infty} q_k [B^*(s)]^M \\ &= Q_M[B^*(s)] + [B^*(s)]^M [1 - Q_M(1)]. \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

所以

$$\begin{aligned} E(S) &= bQ'_M(1) + Mb[1 - Q_M(1)] \quad [\text{由 (4.3.34)}] \\ &= \frac{\rho E(V)}{1 - \rho} = bE(\Phi). \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

注意, (4.3.29) 是本小节所论系统的平稳条件. 这是因为在一个服务周期中到达的平均信元数 (即在一个服务期服务的平均信

元数)必须小于  $M$ . 即

$$\begin{aligned} E[N(S+V)] &= \lambda E(s+V) = \lambda [E(S) + E(V)] \\ &= \lambda \left[ \frac{\rho E(V)}{1-\rho} + E(V) \right] = \frac{\lambda E(V)}{1-\rho} < M. \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

从而得(4.3.29).

## § 4.4 减少服务系统

在这一节我们考虑另一类服务系统. 在这一类服务系统中, 每个服务期结束时系统中的信元数总小于等于服务期开始时系统中的信元数.

### 4.4.1 纯减少服务系统

Takagi 于 1985 年研究了如下的(纯)减少服务系统; 在假时间结束时, 如果系统有信元, 服务就立即开始, 且连续服务到(系统中的)信元数比假时间结束时(服务开始时)信元数少一个; 如果系统中无信元, 服务员立即开始休另一个假时间, 如此等等, 一直到某个假时间结束时系统中有信元为止.

设  $L$  为一信元(服务完)离开系统时系统中的信元数.  $L^*$  为假时间结束时系统中的信元数.  $\pi(z)$ ,  $Q(z)$  分别为  $L$ ,  $L^*$  的 PGF. 因为对于  $L$  的分布, 关于 FCFS 与 LCFS 是相同的, 所以在求  $\pi(z)$ ,  $Q(z)$  时, 我们假设服务规则为(抢占)LCFS. 易见, 一当服务开始, 该服务期的长就是标准  $M/G/1$  系统的一个忙期. 由于  $L$  由相互独立的两部分组成. 一部分是

$$L^* - 1, L^* > 0. \quad (4.4.1)$$

因为  $L$  是一信元离开时系统中的信元数, 所以前一个假时间结束时(服务期开始时)系统中的信元数  $L^*$  必为正. 其中 PGF(记为  $\chi(z)$ )为

$$\chi(z) = E[Z^{L^*-1} | L^* > 0] = \sum_{j=1}^{\infty} Z^{j-1} P\{L^* = j | L^* > 0\}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \cdot \frac{P\{L^* = j\}}{P\{L^* > 0\}} = \frac{Q(Z) - Q(0)}{[1 - Q(0)]Z}. \quad (4.4.2)$$

另一部分是由第一个信元产生的一个忙期中到达和被服务的[按 LCFS 规则服务]信元数, 即该信元之前到达和未被服务完的信元数, 其 PGF 为

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.3)$$

因为

$$L_{n+1}^* = \begin{cases} L_n^* - 1 + f, & L_n^* > 0, \\ f, & L_n^* = 0 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

且

$$Q(Z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} E[Z^{L_n^*}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Z^{L_{n+1}^*}], E(Z^f) = V(\lambda - \lambda Z),$$

所以

$$Q(Z) = V^*(\lambda - \lambda Z) \left[ \frac{Q(Z) - Q(0)}{Z} + Q(0) \right]. \quad (4.4.5)$$

从而

$$Q(Z) = \frac{Q(0)(1 - Z)V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.6)$$

由上式与条件  $Q(1) = 1$  得

$$Q(0) = 1 - \lambda E(V). \quad (4.4.7)$$

故

$$Q(Z) = \frac{[1 - \lambda E(V)](1 - Z)V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.8)$$

由

(4.4.2)与(4.4.8)得

$$\chi(Z) = \frac{[1 - \lambda E(V)](1 - Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \cdot \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1 - Z)}. \quad (4.4.9)$$

又因

$$L^* = L^x + f, \quad (4.4.10)$$

所以

$$Q(Z) = E(Z^{L^*})E(Z^f) = H(Z)V^*(\lambda - \lambda Z).$$

故

$$H(z) = \frac{Q(Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z)} = \frac{(1-Z)[1 - \lambda E(V)]}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.11)$$

从而

$$\chi(Z) = H(Z)\alpha_-(Z), \quad (4.4.12)$$

其中

$$\alpha_-(Z) = \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1 - Z)}. \quad (4.4.13)$$

为在一个假时间中到达的任一个信元之前到达的信元数的 PGF. 由(4.4.12)与(4.4.3)以及独立性得

$$\pi(Z) = \chi(Z) \cdot \pi_{M/G/1}(Z) = H(Z)\alpha_-(Z)\pi_{M/G/1}(Z). \quad (4.4.14)$$

对 FCFS 规则, 由(4.4.14)得信元等待时间  $W$  的 LST:

$$W^*(s) = \frac{1 - V^*(s)}{sE(V)} \cdot \frac{s[1 - \lambda E(V)]}{s - \lambda + \lambda V^*(s)} \cdot \frac{s(1 - \rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}, \quad (4.4.15)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V^2)}{2E(V)[1 - \lambda E(V)]} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)}. \quad (4.4.16)$$

#### 4.4.2 一般减少服务系统

纯减少服务系统可以推广到如下的一般减少服务系统: 服务员一当进行服务, 他就一直服务到: (1) 系统中的信元比假时间结束时(即服务期开始时)系统中的信元数少  $M$  个, 或者(2) 系统中无信元. 对于这个系统我们先来求  $L^*$  (一个假时间结束时系统中的信元数)的 PGF  $Q(Z)$

设  $L_n^*$  仍为第  $n$  个假时间结束时系统中的信元数. 因为

$$L_{n+1}^* = \begin{cases} f, & L_n^* < M, \\ L_n^* - M + f, & L_n^* \geq M, \end{cases} \quad (4.4.17)$$

且  $\{L_n^*, n = 1, 2, 3, \dots\}$  的一步转移概率为

$$\begin{aligned}
p_{jk} &= P\{L_{n+1}^* = k \mid L_n^* = j\} \\
&= \begin{cases} f_k, j < M, \\ f_{k+M-j}, M+k \geq j \geq M, \\ 0, j \geq M, j > k-M, \end{cases} \quad (4.4.18)
\end{aligned}$$

故

$\{L_n^*, n=1,2,3,\dots\}$  为齐次马尔可夫链. 从而  $L^*$  的分布为

$$\begin{aligned}
q_k &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P\{L_{n+1}^* = k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\{L_n^* = j\} p_{jk} \\
&= f_k \sum_{j=0}^{M-1} q_j + \sum_{j=M}^{k+M} q_j f_{k+M-j}, k=0,1,2,\dots. \quad (4.4.19)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
Q(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} Z^k q_k = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{M-1} f_k q_j + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=M}^{k+M} q_j f_{k+M-j} Z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Z^k f_k \sum_{j=0}^{M-1} q_j + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} \sum_{k=j-M}^{\infty} f_{k+M-j} Z^{k+M-j} \\
&= F(Z) Q_M(1) + \frac{1}{Z^M} \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^j \sum_{m=0}^{\infty} Z^m f_m \\
&= F(Z) Q_M(1) + \frac{1}{Z^M} [Q(Z) - Q_M(Z)] F(Z) \\
&= V^*(\lambda - \lambda Z) \{Q_M(1) + \frac{1}{Z^M} [Q(Z) - Q_M(Z)]\}. \quad (4.4.20)
\end{aligned}$$

由上式解出  $Q(Z)$ , 得

$$Q(Z) = \frac{[Q_M(Z) - Z^M Q_M(1)] V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z^M}. \quad (4.4.21)$$

与 4.3.2 节类似, 上式右边分母当

$$\lambda E(V) < M$$

时, 在  $|Z|=1$  内有  $M-1$  个零点. 由拉格朗日定理, 它们是

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi m n j / M} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{V^*(\lambda - \lambda Z)\}^{n/M} \Big|_{z=0},$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (4.4.22)$$

且由条件 (4.4.21) 右边的分子在



$$Z = Z_m, m = 1, 2, \dots, M-1,$$

也是 0. 这样,  $Q_M(Z)$  的  $M$  个系数  $\{q_k, k = 0, 1, 2, \dots, M-1\}$  由线性方程组:

$$\sum_{k=0}^{M-1} [Z_m^M - Z_m^k] q_k = 0, m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (4.4.23)$$

和方程

$$Q'_M(1) = \lambda E(V) - M[1 - Q_M(1)] \quad (4.4.24)$$

确定. (4.4.24) 由 (4.4.21) 和条件  $Q(1) = 1$  可得.

现在我们来求一信元离开时系统中信元数  $L$  的 PGF  $\pi(Z)$ . 因为在一个服务期内服务完的平均信元数为

$$\begin{aligned} & \left[ \text{因 } \Phi = \begin{cases} \sum_{i=1}^{L^*} \Gamma_i, L^* < M \\ \sum_{i=1}^M \Gamma_i, L^* \geq M \end{cases} \right] \\ E(\Phi) &= \sum_{k=1}^{M-1} q_k k E(\Gamma) + \sum_{k=M}^{\infty} q_k M E(\Gamma) \\ &= \frac{1}{1-\rho} \sum_{k=1}^{M-1} k q_k + \frac{M}{1-\rho} \sum_{k=M}^{\infty} q_k \\ &= \frac{1}{1-\rho} \{ Q'_M(1) + M[1 - Q_M(1)] \} \quad [\text{由 (4.4.24)}] \\ &= \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}, \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

其中  $\Gamma$  为系统  $M/G/1$  中一个忙期中服务完的信元数, 诸  $\Gamma_i$  相互独立, 均与  $\Gamma$  同分布.

设  $L_n$  为第  $n$  个信元离开时系统中的信元数. 当  $L^* = k (< M)$  时, 服务期就由  $k$  个忙期组成, 而在每个忙期中信元离开时系统中的信元数的 PGF 可以像一般  $M/G/1$  系统那样处理. 由 (3.1.26) 知对于一般  $M/G/1$  系统一个信元离开时系统中信元数的 PGF 为

$$\frac{\pi_0(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z},$$

其中  $\pi_0 = 1 - \rho$  为系统中无信元的概率. 类似地, 当一个忙期开始时系统中有  $j$  个信元, 到该忙期结束时, 系统中将恰有  $j - 1$  个信元, 这也是下一个忙期开始时系统中的信元数. 所以当第  $n$  个信元为第  $j$  个忙期中一个信元时,  $E(Z^{L_n})$  由

$$Z^{j-1} \frac{(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}$$

组成. 如果  $L^* = k < M$ , 则服务期由  $k$  个忙期组成, 这个  $k$  个忙期分别以  $k, k-1, \dots, 1$  个信元开始. 因此  $E\left[\sum_{n=1}^{\phi} Z^{L_n}\right]$  为

$$\sum_{j=1}^k Z^{j-1} \frac{(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} = \frac{(1-Z^k)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.26)$$

如果  $L^* = k \geq M$ , 则服务期由  $M$  个忙期组成, 这  $M$  个忙期分别以  $k, k-1, \dots, k-M+1$  个信元开始. 因此,  $E\left[\sum_{n=1}^{\phi} Z^{L_n}\right]$  为

$$\sum_{j=k-M+1}^k Z^{j-1} \frac{(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} = \frac{(Z^{k-M} - Z^k)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.27)$$

所以

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\phi} Z^{L_n}\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E\left[\sum_{n=1}^{\phi} Z^{L_n} \mid L^* = k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} q_k \frac{(1-Z^k)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} + \sum_{k=M}^{\infty} q_k \frac{(Z^{k-M} - Z^k)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\ &= \{Q_M(1) - Q(Z) + Z^{-M}[Q(Z) - Q_M(Z)]\} \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

由(4.4.21)得

$$E\left[\sum_{n=1}^{\phi} Z^{L_n}\right] = \frac{[1 - V^*(\lambda - \lambda Z)][Q_M(Z) - Z^M Q_M(1)]B^*(\lambda - \lambda Z)}{[V^*(\lambda - \lambda Z) - Z^M][B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]}. \quad (4.4.29)$$

由(4.2.8), (4.4.25)与(4.4.29)得

$$\pi(Z) = \frac{(1-\rho)[1-V^*(\lambda-\lambda Z)][Q_M(Z)-Z^M Q_M(1)]B^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda E(V)[V^*(\lambda-\lambda Z)-Z^M][B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]} \quad (4.4.30)$$

从而对先来先服务规则下,信元等待时间  $W$  的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{1-V^*(s)}{sE(V)} \cdot \frac{(1-s/\lambda)^M Q_M(1) - Q_M(1-s/\lambda)}{(1-s/\lambda)^M - V^*(s)} \cdot \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \quad (4.4.31)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda^2 E(V^2) - Q_M''(1) - M(M-1)[1-Q_M(1)]}{2\lambda[M-\lambda E(V)]} + \frac{2b^{(2)}}{2(1-\rho)}. \quad (4.4.32)$$

该系统的平稳条件为

$$E(\Phi) < ME(\Gamma) = \frac{M}{1-\rho}, \quad \rho < 1,$$

即

$$\lambda E(V) < M, \quad \rho < 1. \quad (4.4.33)$$

### 4.4.3 二项穷尽服务系统

二项穷尽服务系统是这样的系统:服务一经开始,它将以概率

$$C_L^* p^k (1-p)^{L^*-k}, \quad k=0,1,\dots,L^* \quad (4.4.34)$$

使系统中的信元数比服务开始时系统中信元  $L^*$  少  $k$  个. 即设服务期开始时系统中信元为  $L^* = n$  个, 当服务期结束时, 系统中以概率  $C_n^* p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\dots,n$  有  $n-k$  个信元. 其中  $p(0 < p \leq 1)$  是参数. 当  $p=1$  时, 系统就变为穷尽服务系统.

在这个系统中, 设  $L_n^*$  为第  $n$  个假时间结束时系统中的信元数.  $\eta$  为下一个服务期开始时与结束时系统中信元数之差. 因为

$$L_{n+1}^* = L_n^* - \eta + f, \quad (4.4.35)$$

其中  $f$  为第  $n+1$  个假时间中到达的信元数, 所以

$$Q(Z) = E[Z^{L^*}] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} E[Z^{L_{n+1}^*}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Z^{L_n^* - \eta + f}]$$

$$\begin{aligned}
&= E[Z^{L^* - \eta}]E(Z') \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q_n E[Z^{n-\eta}] V^*(\lambda - \lambda Z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot Z^{n-k} V^*(\lambda - \lambda Z) \\
&= Q[p + (1-p)Z] V^*(\lambda - \lambda Z). \tag{4.4.36}
\end{aligned}$$

由此得

$$E(L^*) = Q'(1) = \frac{\lambda E(V)}{p}, \tag{4.4.37}$$

$$Q''(1) = \frac{2(1-p)[\lambda E(V)]^2}{p^2(2-p)} + \frac{\lambda^2 E(V^2)}{p(2-p)}. \tag{4.4.38}$$

注意,

$$H(Z) \equiv E(Z^{L^*}) = E(Z^{L^* - \eta}) = Q[p + (1-p)Z]. \tag{4.4.39}$$

为求一信元离开系统时系统中的信元数的 PGF  $\pi(Z)$ , 需求

$E(\Phi)$  与  $E[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}]$ . 因为

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\eta} \Gamma_i, \tag{4.4.40}$$

其中  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$  独立同分布, 均与  $\Gamma$  同分布, 而  $\Gamma$  为一般系统  $M/G/1$  中一个忙期中服务完的信元数, 所以

$$\begin{aligned}
E\Phi &= E(\Gamma)E(\eta) = \frac{1}{1-\rho} E[E(\eta | L^*)] = \frac{E[L^* p]}{1-\rho} \\
&= \frac{pE(L^*)}{1-\rho} = \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \tag{4.4.41}
\end{aligned}$$

又类似于(4.4.28)式的推导, 有

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} | L^* = k\right] q_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q_k \sum_{l=0}^k C_k^l p^l (1-p)^{k-l} Z^{k-l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{j=1}^I Z^{j-1} \frac{(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \{ [p + (1-p)z]^k - z^k \} \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\
& = \{Q[p + (1-p)Z] - Q(Z)\} \cdot \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}.
\end{aligned} \tag{4.4.42}$$

由(4.2.8), (4.4.41)与(4.4.42)得

$$\begin{aligned}
\pi(Z) & = \{Q[p + (1-p)Z] - Q(Z)\} \cdot \frac{(1-\rho)B^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\
& = H(Z) \cdot \alpha_-(Z) \cdot \pi_{M/G/1}(Z),
\end{aligned} \tag{4.4.43}$$

其中  $H(Z)$ ,  $\alpha_-(Z)$ ,  $\pi_{M/G/1}(Z)$  分别由(4.4.39), (4.4.13), (4.4.3)给出. 由(3.1.26)得 FCFS 规则下一信元等待时间  $W$  的 LST

$$\begin{aligned}
W^*(s) & = \frac{Q[1 - (1-p)\frac{s}{\lambda}] - Q(1 - \frac{s}{\lambda})}{E(V)s} \\
& \cdot \frac{(1-\rho)s}{\lambda B^*(s) - \lambda + s},
\end{aligned} \tag{4.4.44}$$

且

$$\begin{aligned}
E(W) & = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{(2-p)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)} \\
& = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{(1-p)E(V)}{p}.
\end{aligned} \tag{4.4.45}$$

当  $p = 1$  时, (4.4.44), (4.4.45) 分别化为 (4.1.37) 与 (4.1.40).

## 第五章 $G/M/m$ 系统

这一章讨论  $G/M/m$  系统. 该系统的基本假设如下:

(1) 系统到达间隔时间序列  $\{J_i, i \geq 1\}$  为 i.i.d 随机变量序列,  $J_1$  服从一般分布, 其分布函数为  $A(t)$ , 且存在前两阶原点矩.

(2) 服务机构有  $m$  个服务台, 每个服务台对每个顾客的服务时间互相独立同分布, 均服从参数为  $\mu$  的指数分布. 即设  $\{B_i, i \geq 1\}$  为服务时间序列. 则  $\{B_i, i \geq 1\}$  i.i.d 且  $B_1 \sim \Gamma(1, \mu)$ .

(3)  $\{B_i, i \geq 1\}$  与  $\{J_i, i \geq 1\}$  相互独立.

### § 5.1 到达时刻队长的平稳分布

#### 5.1.1 嵌入马氏链的转移概率

设  $X(t)$  为时刻  $t$  时系统中的顾客数.  $\tau_n$  为第  $n$  个顾客到达的时刻.  $Q_n$  为第  $n$  个顾客到达时系统中的顾客数, 即  $Q_n = X(\tau_n - 0)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .  $V_{n+1}$  为在到达间隔时间  $J_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n$  中服务完的顾客数,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . 这时  $X(t)$  已不是马氏过程. 但是, 易见有

$$Q_{n+1} = Q_n + 1 - V_{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1.1)$$

因此, 当  $Q_n$  已知时,  $Q_{n+1}$  与  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$  无关, 故  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是马氏链. 又因诸  $V_n$  独立同分布且  $V_{n+1}$  与  $Q_n$  独立, 所以

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n,1) &= P\{Q_{n+1} = j \mid Q_n = i\} = P\{Q_n + 1 - V_{n+1} = j \mid Q_n = i\} \\ &= P\{V_{n+1} = i + 1 - j\} = P\{V_1 = i + 1 - j\}, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

从而一步转移概率  $p_{i,j}(n,1) = p_{ij}$  与  $n$  无关, 即  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是齐次马氏链. 设  $M(t)$  表示在时间区间  $(0, t]$  中离开系统的顾客数.

(1) 当  $j \leq i+1 \leq m$  时,

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{V_1 = i+1-j\} = P\{M(J_1) = i+1-j\} \\ &= \int_0^\infty P\{M(t) = i+1-j\} dA(t) \\ &= \int_0^\infty C_{i+1}^{i+1-j} [P\{B_1 \leq t\}]^{i+1-j} [P\{B_1 > t\}]^j dA(t) \\ &= \int_0^\infty C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-j\mu t} dA(t). \end{aligned}$$

(2) 当  $m \leq j \leq i+1$  时

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{V_1 = i+1-j\} = \int_0^\infty P\{M(t) = i+1-j\} dA(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-m\mu t} \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dA(t) \triangleq \beta_{i+1-j}. \end{aligned}$$

(3) 当  $j < m < i+1$  时

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{V_1 = i+1-j\} = P\{M(J_1) = i+1-j\} \\ &= \int_0^\infty P\{M(t) = i+1-j\} dA(t). \end{aligned}$$

现来求  $P\{M(t) = i+1-j\}$ , 因为  $j < m < i+1$ , 所以在长为  $t$  的时间区间  $(0, t]$  中, 先有顾客在等待 ( $m$  个服务台都在工作), 后无顾客在等待. 在有顾客等待这段时间内, 服务了  $i+1-m$  个顾客,

故其长为  $\sum_{k=1}^{i+1-m} \eta_k$ ,  $\eta_k \sim \Gamma(1, m\mu)$ , 且  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  相互独立同分布.

从而  $\sum_{k=1}^{i+1-m} \eta_k \sim \Gamma(i+1-m, m\mu)$ . 从无顾客等待时刻到时刻  $t$

这段时间服务了剩下的  $m$  个顾客中的  $m-j$  个顾客, 从而有

$$\begin{aligned} P\{M(t) = i+1-j\} &= \int_0^t P\{M(t) = i+1-j \mid \sum_{k=1}^{i+1-m} \eta_k \\ &= x\} e^{-m\mu x} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx \\ &= \int_0^t P\{M(t-x) = m-j\} e^{-m\mu x} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t C_m^{m-j} [1 - e^{-\mu(t-x)}]^{m-j} e^{-\mu j(t-x)} e^{-m\mu x} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx \\
&= \int_0^t C_m^j e^{-j\mu t} [e^{-\mu x} - e^{-\mu t}]^{m-j} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx.
\end{aligned}$$

故

$$p_{ij} = \int_0^\infty C_m^j e^{-j\mu t} \left[ \int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{m-j} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx \right] dA(t).$$

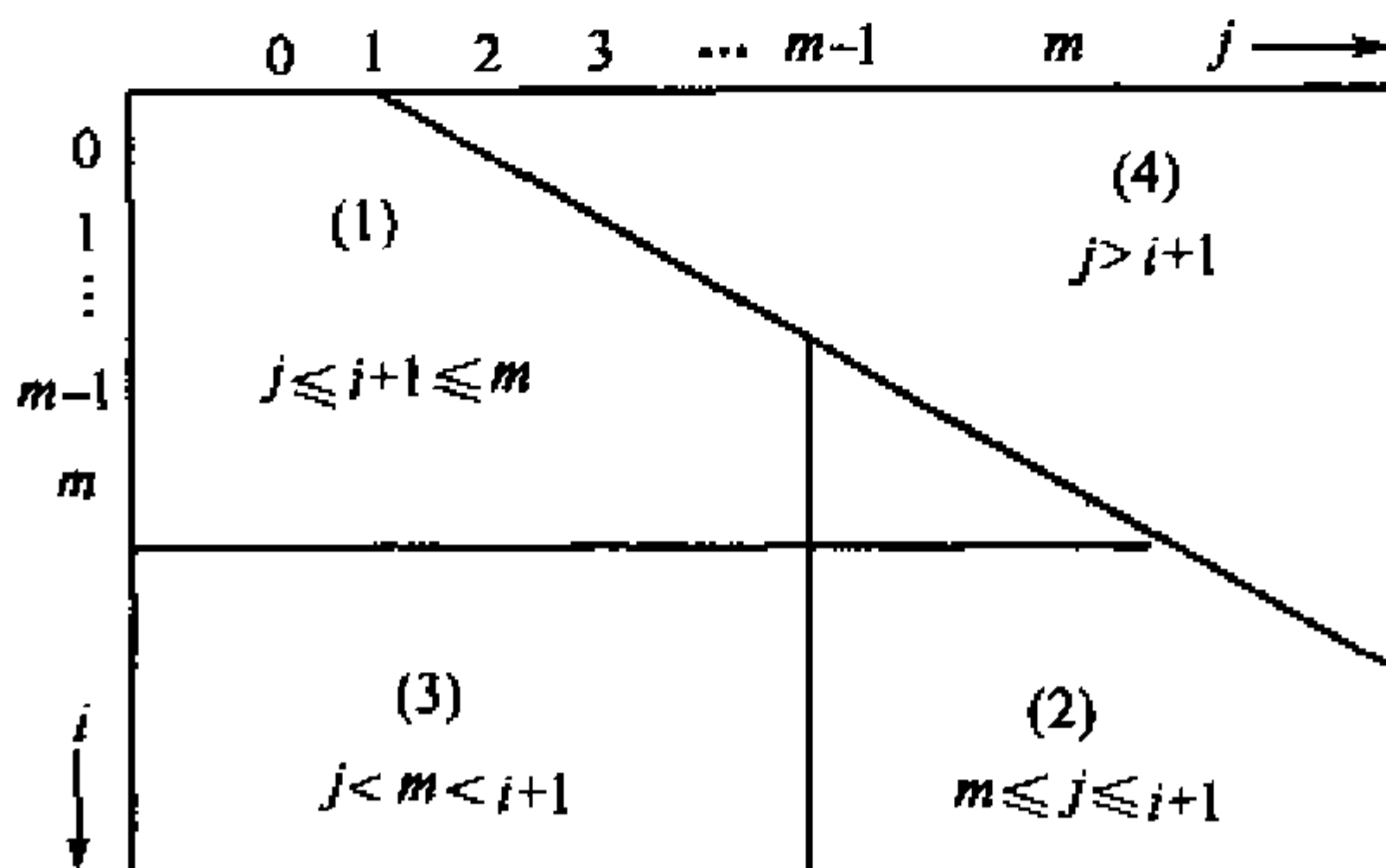
(4) 当  $j > i + 1$  时,

$$p_{ij} = P\{V_1 = i + 1 - j\} = 0.$$

综上所述得

$$p_{ij}(n, 1) = p_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty C_{i+1} e^{-j\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} dA(t), & j \leq i + 1 \leq m, \\ \int_0^\infty e^{-m\mu t} \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dA(t), & m \leq j \leq i + 1, \\ \int_0^\infty C_m^j e^{-j\mu t} \left[ \int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{m-j} \frac{m\mu (m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!} dx \right] \\ \quad \cdot dA(t), & j < m < i + 1, \\ 0, & j > i + 1, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

且  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的转移概率矩阵具有如下形式:





即

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m-2,0} & p_{m-2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m-2,m-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{m-1,0} & p_{m-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m-1,m-1} & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m,m-1} & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \cdots \\ p_{m+1,0} & p_{m+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m+1,m-1} & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (5.1.4)$$

### 5.1.2 到达时刻队长的平稳分布

对  $G/M/m$ , 记  $\frac{1}{\lambda} = E(J_1)$ . 当  $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$  时,  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的平稳分布存在(证明见[2]). 记其平稳分布为  $\{\pi_k, k \geq 0\}$ . 则由平稳方程

$$(\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_j, \cdots) = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_j, \cdots)P \quad (5.1.5)$$

与(5.1.4)当  $j \geq m-1$  时, 易求得诸  $\pi_j$  满足方程

$$\pi_{j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+j} \beta_k, \quad j \geq m-1. \quad (5.1.6)$$

为解此差分方程. 令

$$\pi_j = \sigma^j, \quad j \geq m-1, \quad (5.1.7)$$

$\sigma$  为待定常数. 于是得  $\sigma^{j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^{k+j} \beta_k$ , 即

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \beta_k, \quad (5.1.8)$$

因为

$$\beta_k = \int_0^{\infty} e^{-m\mu t} \frac{(m\mu t)^k}{k!} dA(t),$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \int_0^{\infty} e^{-m\mu t} \frac{(m\mu t)^k}{k!} dA(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-m\mu t} e^{\sigma m\mu t} dA(t) = \int_0^{\infty} e^{-(m\mu - \sigma m\mu)t} dA(t),\end{aligned}$$

即

$$\sigma = A^*(m\mu - m\mu\sigma), \quad (5.1.9)$$

其中  $A^*(s)$  为  $J_1$  的 LST

$\sigma$  为方程

$$z = A^*(m\mu - m\mu z)$$

在单位圆  $|z| < 1$  内的唯一解. 把  $\sigma$  代入(5.1.7)得

$$\pi_j = k\sigma^j \quad \left(k \text{ 可由 } \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1 \text{ 确定}\right), \quad j \geq m-1. \quad (5.1.10)$$

从而平稳分布解的一般式为

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-2}, k\sigma^{m-1}, k\sigma^m, k\sigma^{m+1}, \dots). \quad (5.1.11)$$

现在求  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-2}$ . 记  $R_j = \frac{\pi_j}{k\sigma^{m-1}}, j \leq m-1$ . 则上式为

$$k\sigma^{m-1}(R_0, R_1, \dots, R_{m-2}, 1, \sigma, \sigma^2, \dots). \quad (5.1.12)$$

从而(5.1.5)式的前  $m-1$  个方程为

$$R_j = \sum_{i=j-1}^{m-2} R_i p_{ij} + \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i-(m-1)} p_{ij}, \quad i < m-1. \quad (5.1.13)$$

故

$$R_{j-1} = \left[ R_j - \sum_{i=j}^{m-2} R_i p_{ij} - \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i-(m-1)} p_{ij} \right] / p_{j-1,j}, \quad j \leq m-1. \quad (5.1.14)$$

在上式中, 令  $j = m-1$  (由于  $R_{m-1} = 1$ ) 得

$$R_{m-2} = \left[ 1 - \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i-(m-1)} p_{i,m-1} \right] / p_{m-2,m-1}. \quad (5.1.15)$$

令  $j = m-2$ , 得

$$R_{m-3} = \left[ R_{m-2} - R_{m-2} p_{m-2, m-2} - \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i-(m-1)} p_{i, m-2} \right] / p_{m-3, m-2}, \quad (5.1.16)$$

其中  $R_{m-2}$  由 (5.1.15) 确定. 依此可逐个求得  $R_{m-4}, R_{m-5}, \dots, R_0$ . 现求 (5.1.12) 中的  $k\sigma^{m-1}$ . 由

$$k\sigma^{m-1} \left[ \sum_{j=0}^{m-2} R_j + \sum_{j=m-1}^{\infty} \sigma^{j-(m-1)} \right] = 1,$$

得

$$k\sigma^{m-1} = \left[ \sum_{j=0}^{m-2} R_j + \frac{1}{1-\sigma} \right]^{-1}. \quad (5.1.17)$$

这样, 到达时刻队长的平稳分布由 (5.1.9), (5.1.11), (5.1.14), (5.1.17) 完全确定.

一顾客到达时需要等待的概率为

$$\sum_{j=m}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=m}^{\infty} k\sigma^m = \frac{k\sigma^m}{1-\sigma}, \quad (5.1.18)$$

其中  $\sigma$  由 (5.1.9) 确定,  $k\sigma^{m-1}$  由 (5.1.17) 确定.

由平稳分布 (5.1.12) 可得平均队长  $\bar{X}$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= k\sigma^{m-1} \left[ \sum_{j=0}^{m-2} jR_j + \sum_{j=m-1}^{\infty} j\sigma^{j-(m-1)} \right] \quad [\text{令 } j - (m-1) = r] \\ &= k\sigma^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m-2} jR_j + \sum_{r=0}^{\infty} [r + (m-1)] \sigma^r \right\} \\ &= k\sigma^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m-2} jR_j + \frac{m-1}{1-\sigma} + \sum_{r=1}^{\infty} r\sigma^{r-1} \sigma \right\} \\ &= k\sigma^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m-2} jR_j + \frac{m-1}{1-\sigma} + \frac{\sigma}{(1-\sigma)^2} \right\} \\ &= k\sigma^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m-2} jR_j + \frac{(m-1)(1-\sigma) + \sigma}{(1-\sigma)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

平均等待队长为

$$\bar{X}_q = \sum_{j=0}^{\infty} jk\sigma^{j+m} = k\sigma^{m+1} \sum_{j=1}^{\infty} j\sigma^{j-1} = \frac{k\sigma^{m+1}}{(1-\sigma)^2}, \quad (5.1.20)$$

## § 5.2 等待时间的分布

### 5.2.1 等待时间的分布

现考虑统计平衡后(即在条件 $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ 下)顾客等待时间的分布. 设  $W$  为一顾客的等待时间的长.

$$P\{W = 0\} = \sum_{j=0}^{m-1} \pi_j = 1 - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j = 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma}. \quad (5.2.1)$$

当  $t > 0$  时,

$$\begin{aligned} P\{W < t\} &= P\{W = 0\} + P\{0 < W < t\} \\ &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} + \sum_{j=m}^{\infty} P\{0 < W < t \mid \text{到达时系统中有} \\ &\quad j \text{ 个顾客}\} \cdot \pi_j \\ &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} + \sum_{j=m}^{\infty} k\sigma^j P\left\{0 < \sum_{i=1}^{j+1-m} \tilde{\beta}_i < t\right\}, \end{aligned}$$

其中  $\tilde{\beta}_i \sim \Gamma(1, m\mu)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , 且  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \dots$  相互独立, 故

$$\sum_{i=1}^{j+1-m} \tilde{\beta}_i \sim \Gamma(j+1-m, m\mu).$$

从而

$$\begin{aligned} P\{W < t\} &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} + \sum_{j=m}^{\infty} k\sigma^j \int_0^t e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^{j-m}}{(j-m)!} dx \\ &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} + k\sigma^m \int_0^t e^{-m\mu x} \cdot m\mu e^{m\mu x} dx \\ &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} + km\mu\sigma^m \cdot \frac{1 - e^{-m\mu(1-\sigma)t}}{m\mu(1-\sigma)} \\ &= 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} e^{-m\mu(1-\sigma)t}, \end{aligned}$$

即

$$F_W(t) \equiv P\{W < t\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma} e^{-m\mu(1-\sigma)t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

$W$  的密度函数  $f_W(t)$  为

$$f_W(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (1 - \frac{k\sigma^m}{1-\sigma})\delta(t) + m\mu k\sigma^m e^{-m\mu(1-\sigma)t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

从而

$$E(W) = \int_0^\infty f_W(t) t dt = \frac{k\sigma^m}{m\mu(1-\sigma)^2}, \quad (5.2.4)$$

$$D(W) = \frac{k\sigma^m}{m^2\mu^2(1-\sigma)^3}. \quad (5.2.5)$$

因为逗留时间  $S = W + B$ , 而  $B \sim \Gamma(1, \mu)$  且  $W$  与  $B$  独立, 所以  $S$  的密度函数为

$$\begin{aligned} f_S(t) &= \int_{-\infty}^\infty f_W(x) f_B(t-x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t f_W(x) f_B(t-x) dx, & t \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{m\mu k\sigma^m}{1-m(1-\sigma)} e^{-m\mu(1-\sigma)t} + \frac{1-\sigma-m(1-\sigma)^2-k\sigma^m}{1-\sigma-m(1-\sigma)^2} \mu e^{-\mu t}, & t \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$E(S) = \frac{k\sigma^m}{m\mu(1-\sigma)^2} + \frac{1}{\mu}, \quad (5.2.7)$$

$$D(S) = \frac{k\sigma^m}{m^2\mu^2(1-\sigma)^3} + \frac{1}{\mu^2}. \quad (5.2.8)$$

### 5.2.2 $G/M/1$ 系统

当  $m=1$  时, (5.1.9) 变为

$$\sigma = A^*(\mu - \mu\sigma). \quad (5.2.9)$$

由此解出  $\sigma$  代入 (5.1.10). 再由  $\sum_{j=0}^\infty \pi_j = 1$ , 得到达时刻的分布:

$$\pi_j = (1 - \sigma)\sigma^j, \quad j \geq 0, \quad \rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (5.2.10)$$

从而, 到达时刻队长的数学期望与方差分别为

$$E(X) = \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad D(X) = \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma)^2}, \quad \rho < 1. \quad (5.2.11)$$

由(5.2.2). 这时 ( $m = 1$ ) 等待时间  $W$  的分布函数为

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \sigma e^{-\mu(1-\sigma)t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad \rho < 1. \quad (5.2.12)$$

从而  $W$  的分布密度函数为

$$f_W(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (1 - \sigma)\delta(t) + \mu(1 - \sigma)\sigma e^{-\mu(1-\sigma)t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

故

$$E(W) = \frac{\sigma}{\mu(1 - \sigma)}, \quad D(W) = \frac{\sigma}{\mu^2(1 - \sigma)^2}, \quad \rho < 1. \quad (5.2.14)$$

### 5.2.3 G/M/2 系统

当  $m = 2$  时, (5.1.9) 变为

$$\sigma = A^*(2\mu - 2\mu\sigma). \quad (5.2.15)$$

由上式解出  $\sigma$  代入(5.1.10)得

$$\pi_j = k\sigma^j, \quad j \geq 1. \quad (5.2.16)$$

由(5.1.14)得

$$R_0 = \left[ R_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^{i-1} p_{i1} \right] / p_{01}. \quad (5.2.17)$$

由(1)得

$$p_{01} = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t})^0 e^{-\mu t} dA(t) = A^*(\mu), \quad (5.2.18)$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= \int_0^{\infty} C_2^1 (1 - e^{-\mu t}) e^{-\mu t} dA(t) \\ &= 2A^*(\mu) - 2A^*(2\mu). \end{aligned} \quad (5.2.18')$$

由(3)得

$$p_{i1} = \int_0^\infty C_2^1 e^{-\mu t} \left[ \int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t}) \frac{2\mu(2\mu x)^{i-2}}{(i-2)!} dx \right] dA(t), \quad i \geq 2.$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \sigma^{i-1} p_{i1} &= \int_0^\infty 2e^{-\mu t} \left[ \int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t}) 2\mu \sigma e^{2\mu \sigma x} dx \right] dA(t) \\ &= 4\mu \sigma \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^t [e^{-\mu(1-2\sigma)x} - e^{-\mu t} e^{2\mu \sigma x}] dx dA(t) \\ &= 4\mu \sigma \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\mu(1-2\sigma)} [e^{-\mu t} - e^{2\mu(1-\sigma)t}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\mu \sigma} [e^{-2\mu t} - e^{-2\mu(1-\sigma)t}] \right\} dA(t) \\ &= 2A^*(2\mu) - 2A^*(2\mu - 2\mu \sigma) \\ &\quad + \frac{4\sigma}{1-2\sigma} [A^*(\mu) - A^*(2\mu - 2\mu \sigma)] \\ &= 2A^*(2\mu) - 2\sigma + \frac{4\sigma}{1-2\sigma} [A^*(\mu) - \sigma]. \quad (5.2.19) \end{aligned}$$

又因  $R_1 = R_{m-1} = 1$ , 将(5.2.19), (5.2.18), (5.2.18')一起代入(5.2.17)得

$$\begin{aligned} R_0 &= \left[ 1 - 2A^*(\mu) + 2A^*(2\mu) - 2A^*(2\mu) + 2\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\sigma}{1-2\sigma} (A^*(\mu) - \sigma) \right] / A^*(\mu) \\ &= \frac{1 - 2A^*(\mu)}{(1-2\sigma)A^*(\mu)}. \quad (5.2.20) \end{aligned}$$

由(5.1.17)得

$$K = \left[ \sigma R_0 + \frac{\sigma}{1-\sigma} \right]^{-1} = \frac{(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)}{\sigma[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \quad (5.2.21)$$

由(5.1.2)知

$$\pi_0 = k\sigma^{m-1}R_0 = k\sigma R_0 = \frac{(1-\sigma)[1-2A^*(\mu)]}{1-\sigma-A^*(\mu)}. \quad (5.2.22)$$

由(5.2.16)得

$$\pi_j = \frac{(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)\sigma^{j-1}}{1-\sigma-A^*(\mu)}, \quad j \geq 1. \quad (5.2.23)$$

故到达时刻队长的数学期望与方差分别为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{(1-2\sigma)A^*(\mu)}{(1-\sigma)[1-\sigma-A^*(\mu)]}, \\ D(X) &= \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{(1-\sigma)^2[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

由(5.2.3)等待时间  $W$  的密度为

$$f_w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(1 - \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{1-\sigma-A^*(\mu)}\right)\delta(t) + \frac{2\mu\sigma(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)}{1-\sigma-A^*(\mu)} \\ \quad \cdot e^{-2\mu(1-\sigma)t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.25)$$

由(5.2.4)与(5.2.5)得

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{2\mu(1-\sigma)[1-\sigma-A^*(\mu)]}, \\ D(W) &= \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{4\mu^2(1-\sigma)^2[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \end{aligned} \quad (5.7.26)$$



## 第六章 离散时间排队系统

在这一章中,我们讨论离散时间参数集的排队系统,我们取时间集为 $\{0,1,2,\dots\}$ ,并假设顾客到达与离开都发生在各单位时间点上,由于服务机构性能的不同,顾客到达与离开的时刻也不同,由此可将系统分为三种类型.第一种类型称为早到达系统,顾客到达发生在(每个)单位时间的开始,顾客的离开发生在(每个)单位时间的结束之前,即顾客在 $(n, n+)$ 中到达,可能在 $((n+1)-, (n+1))$ 中(服务完)离开( $n=0,1,2,3,\dots$ ).第二种类型称为迟到达立刻进入系统,顾客到达发生在(每个)单位时间结束之前,而离开可能发生在(每个)单位时间的开始,即顾客在 $(n-, n)$ 中到达,可能在 $(n, n+)$ 中(服务完)离开( $n=1,2,3,\dots$ ).第三种类型称为迟到达延迟进入系统,即顾客在 $(n-, n)$ 中到达,可能在 $(n+1, (n+1)+)$ 中(服务完)离开( $n=1,2,3,\dots$ ).

由上分类可知,对于迟到达系统,如果在 $(n-, n)$ 中有一个顾客到达并且这时服务员空闲,则对于立刻进入类型,在 $(n, n+)$ 中该顾客可能被服务完离开系统,而对延迟进入类型,在 $(n, n+)$ 中该顾客不可能被服务.本章假设每个顾客的服务时间至少为一个单位时间.

### § 6.1 Geo/Geo/1 系统

Geo/Geo/1 系统的基本假设是:

(1)顾客到达间隔时间序列 $\{J_n, n \geq 1\}$ 是 i.i.d 随机变量序列,且 $J_i$ 服从参数为 $\lambda$ 的几何分布,即 $J_n \sim \text{Geo}(\lambda)$ ,也即 $P\{J_n = k\} = \lambda \bar{\lambda}^{k-1}, k=1,2,3,\dots$ ,其中 $\bar{\lambda}=1-\lambda, 0 < \lambda < 1$ .由定理 1.4.2 系统的到达(输入)过程 $\{N(n), n \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的伯努利过程.

(2) 各个顾客的服务时间序列  $\{B_n, n \geq 1\}$  是 i.i.d 随机变量序列, 且  $B_n \sim \text{Geo}(\mu), 0 < \mu < 1$ .

(3) 服务机构只有一个服务台, 并设  $\{J_n, n \geq 1\}$  与  $\{B_n, n \geq 1\}$  相互独立.

### 6.1.1 队长的平稳分布

设  $Q(t)$  表示时刻  $t$  时 Geo/Geo/1 系统中的顾客数. 对于早到达系统, 记

$$X_n = Q(n-), Y_n = Q(n), Z_n = Q(n+), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.1)$$

对于迟到达立刻进入系统, 记

$$X_n^{(i)} = Q(n-), Y_n^{(i)} = Q(n), Z_n^{(i)} = Q(n+), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.1.2)$$

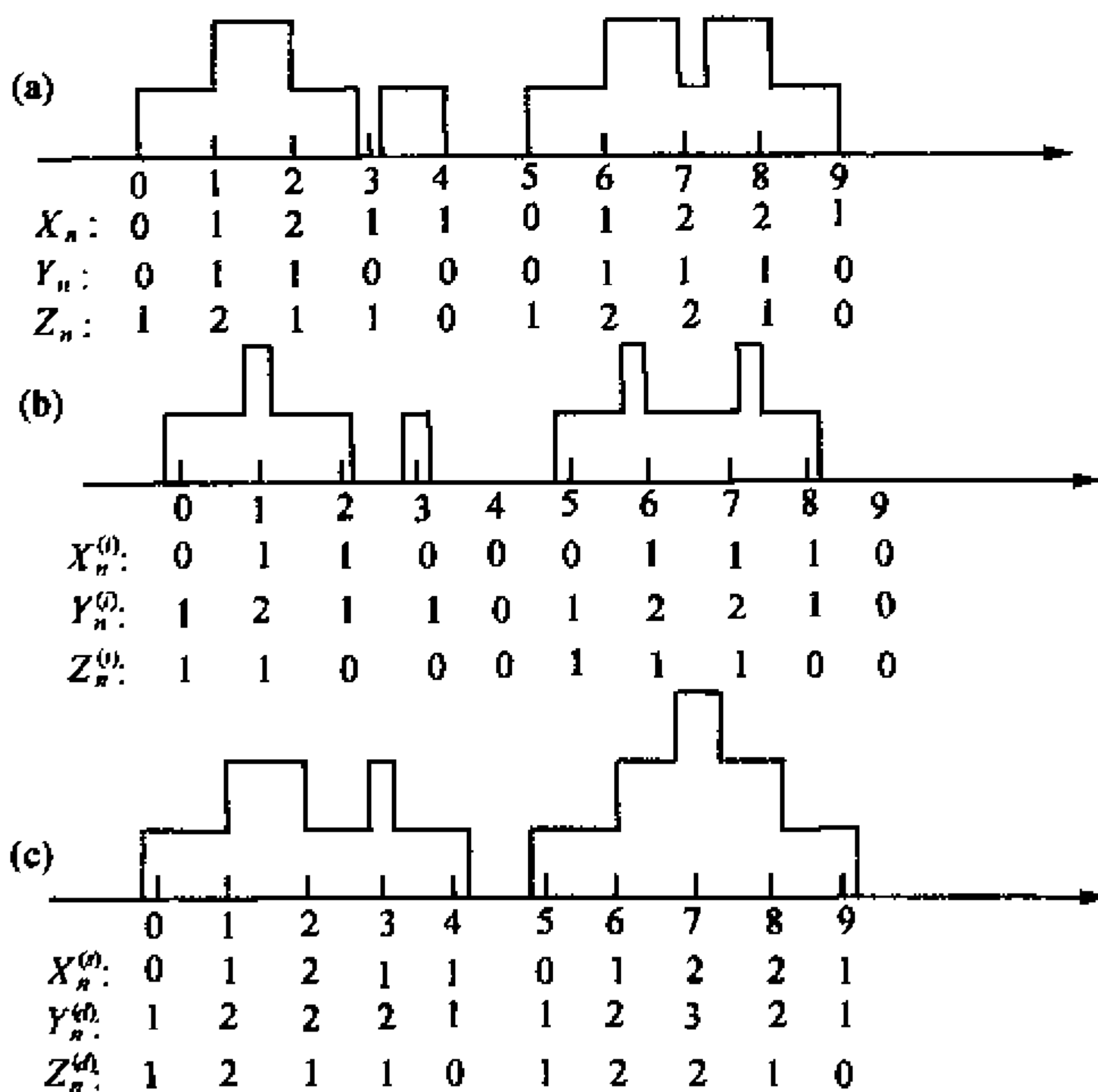


图 6-1 各过程样本路线

对于迟到达延迟进入系统, 记

$$X_n^{(d)} = Q(n-), Y_n^{(d)} = Q(n), Z_n^{(d)} = Q(n+), n=0,1,2,3\cdots. \quad (6.1.3)$$

图 6-1 详细描述上述各过程的样本路线. 这些样本路线描述了在 0, 1, 3, 5, 6, 7 各时间点各有一个顾客到达(即到达间隔时间分别为 1, 2, 2, 1, 1)而在 2, 3, 4, 7, 8, 9 各时间点各有一个顾客离开(即服务时间分别为 2, 1, 1, 2, 1, 1).

由样本路线与图 6-2, 可知

$$Z_n = X_{n+1}. \quad (6.1.4)$$

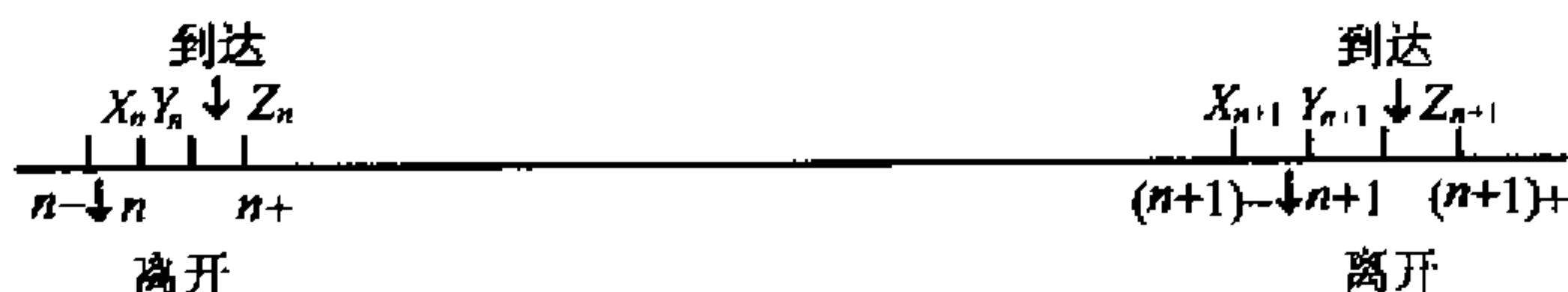


图 6-2

类似地有

$$X_n^{(i)} = Y_n, Y_n^{(i)} = X_{n+1}, X_n^{(d)} = X_n, Z_n^{(d)} = X_{n+1}. \quad (6.1.5)$$

因此, 我们只需考虑早到达系统. 因为过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一步转移概率为

$$P\{X_{(n+1)} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \bar{\lambda}, & j = i, i = 0, \\ \lambda, & j = i + 1, i = 0, \\ \bar{\lambda}\mu + \lambda\mu, & j = i, i \geq 1, \\ \lambda\bar{\mu}, & j = i + 1, i \geq 1, \\ \bar{\lambda}\mu, & j = i - 1, i \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (6.1.6)$$

从而  $\{X_n, n \geq 0\}$  的(一步)转移概率矩阵为

$$P_X = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{\lambda}\mu & \bar{\lambda}\mu + \lambda\mu & \lambda\bar{\mu} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \bar{\lambda}\mu & \lambda\mu + \bar{\lambda} & \mu\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}\mu & \lambda\mu + \bar{\lambda}\mu & \lambda\bar{\mu} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (6.1.7)$$

故  $\{X_n, n \geq 0\}$  是齐次不可约非周期马尔可夫链. 且由平稳方程定义

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk}, k \geq 0$$

知

$$\pi_0 = \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1, \quad (6.1.8)$$

$$\pi_k = \pi_{k-1} p_{k-1} + \pi_k \gamma_k + \pi_{k+1} q_{k+1}, k \geq 1, \quad (6.1.9)$$

其中  $r_0 = \bar{\lambda}$ ,  $p_0 = \lambda$ ,  $q_k = \bar{\lambda}\mu$ ,  $\gamma_k = \lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}$ ,  $p_k = \lambda\bar{\mu}$ ,  $k \geq 1$ .

$$(6.1.10)$$

由(6.1.9)与(6.1.8)得

$$q_{k+1} + \pi_{k+1} - p_k \pi_k = q_k \pi_k - p_{k-1} \pi_{k-1} = q_1 \pi_1 - p_0 \pi_0.$$

从而

$$\pi_k = \frac{p_{k-1}}{q_k} \pi_{k-1} = \frac{p_{k-1} p_{k-2} \cdots p_0}{q_k q_{k-1} \cdots q_1} \pi_0 = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}\mu} \left( \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu} \right)^{k-1} \pi_0, k \geq 1. \quad (6.1.11)$$

又因当  $\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu} < 1$  时, 由  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$  得

$$\pi_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = 1 - \rho, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (6.1.12)$$

又因, 当  $\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda - \lambda\mu < \mu - \mu\lambda \Leftrightarrow \rho < 1$  从而当  $\rho < 1$  时, 过程

$\{X_n, n \geq 0\}$  的平稳分布存在且为

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho, \\ \pi_k = \rho \left( 1 - \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu} \right) \left( \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu} \right)^{k-1}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (6.1.13)$$

由[1]中定理 3.3.4 知,  $\{X_n, n \geq 0\}$  的极限分布也为{6.1.13}式, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = k\} = \pi_k = \begin{cases} 1 - \rho, & k = 0 \\ \rho(1 - \alpha)\alpha^{k-1}, & k \geq 1, \end{cases} \quad \alpha = \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}.$$

因为

$$\begin{cases} P\{Y_n = 0\} = P\{X_n = 0\} + \mu P\{X_n = 1\}, \\ P\{Y_n = k\} = \bar{\mu} P\{X_n = k\} + \mu P\{X_n = k+1\}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (6.1.14)$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 记  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的平稳分布为  $\{\tilde{\pi}_k, k \geq 0\}$ , 则

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 + \mu\pi_1 = 1 - \alpha,$$

$$\tilde{\pi}_k = \bar{\mu}\pi_k + \mu\pi_{k+1} = (1 - \alpha)\alpha^k, \quad k \geq 1.$$

所以  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的平稳分布存在, 且为

$$\tilde{\pi}_k = (1 - \alpha)\alpha^k, \quad k \geq 0. \quad (6.1.15)$$

上式也可通过转移概率矩阵求得.

因为  $P\{Z_n = k\} = P\{X_{n+1} = k\}$ , 所以  $\{Z_n, n \geq 0\}$  的平稳分布存在, 也由 (6.1.13) 式给出. 或因

$$P\{Z_n = 0\} = \bar{\lambda}P\{Y_n = 0\} \rightarrow \bar{\lambda}(1 - \alpha),$$

当  $k \geq 0$  时有

$$P\{Z_n = k\} = \bar{\lambda}P\{Y_n = k\} + \lambda P\{Y_n = k - 1\} \rightarrow \rho(1 - \alpha)\alpha^{k-1} \quad (6.1.16)$$

### 6.1.2 忙期

设  $\theta$  为 Geo/Geo/1 系统的忙期,  $B$  为一个顾客的服务时间, 即  $B \sim \text{Geo}(\mu)$ . 则有

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}, \quad (6.1.17)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$  相互独立均与  $\theta$  同分布. 用  $\theta(Z)$  表示  $\theta$  的 PGF, 则由 PGF 定义有

$$\begin{aligned} \theta(Z) &= E(Z^\theta) = E[Z^{B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(k)}}] P\{B = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^k E(Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_j}) P\{N(k=j)\} P\{B = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^k [\theta(Z)]^j C_k^j \bar{\lambda}^j \bar{\mu}^{k-j} \cdot \mu \bar{\mu}^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k [\lambda \theta(Z) + \bar{\lambda}]^k \mu \bar{\mu}^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{\mu} \cdot \frac{[\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}] \bar{\mu}Z}{1 - [\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}] \bar{\mu}Z} \\
&= \frac{\mu Z [\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}Z [\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]}. \quad (6.1.18)
\end{aligned}$$

由(6.1.17)式与  $E[N(B)] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$  得

$$\begin{aligned}
E(\theta) &= E[B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}] \\
&= \frac{1}{\mu} + E(\theta)E[N(B)] \\
&= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad (\rho < 1). \quad (6.1.19)
\end{aligned}$$

由过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的平稳分布(6.1.3)知  $\pi_0 = 1 - \rho$ , 且  $\lambda_0 = \lambda$ , 从而有  $E(\theta) = \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\pi_0} - 1 \right)$ , 即对于 Geo/Geo/1 系统的嵌入过程  $\{X_n, n \geq 0\}$ , (2.3.11)式也成立.

由(6.1.18)式通过求导数可求  $D(\theta)$ . 现我们用(6.1.17)式求  $D(\theta)$ . 由(6.1.17)式, 得

$$\begin{aligned}
D(\theta) &= D(B) + D[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}] + 2\text{cov}(B, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}) \\
&= \frac{\mu}{\mu^2} + E[N(B)]D(\theta) + D[N(B)]E^2(\theta) \\
&\quad + 2\text{cov}(B, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}) \\
&= \frac{\mu}{\mu^2} + \rho D(\theta) + D[N(B)] \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} + 2E[B(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)})] \\
&\quad - 2 \frac{\rho}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (6.1.20)
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
E[N^2(B)] &= \sum_{k=1}^{\infty} E[N^2(k)] \mu \bar{\mu}^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} E[k\lambda \bar{\lambda} + k^2 \lambda^2] \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
&= \rho \bar{\lambda} + \rho^2(\bar{\mu} + 1), \quad (6.1.21)
\end{aligned}$$

所以

$$D[N(B)] = \rho \bar{\lambda} + \rho^2(\bar{\mu} + 1) - \rho^2 = \bar{\lambda}\rho + \bar{\mu}\rho^2. \quad (6.1.22)$$

又因

$$\begin{aligned}
 E\{B[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}]\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k E[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(k)}] \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k E[N(k)] E(\theta) \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} k^2 \mu \bar{\mu}^{k-1} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1 + \bar{\mu}}{\mu^2} \\
 &= \frac{\lambda + \lambda \bar{\mu}}{\mu^2 (\mu - \lambda)},
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{cov}(B, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}) = \frac{\lambda \bar{\mu}}{\mu^2 (\mu - \lambda)}. \quad (6.1.23)$$

将(6.1.22)与(6.1.23)式代入(6.1.20)式得

$$\begin{aligned}
 D(\theta) &= \frac{1}{1 - \rho} \left[ \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} + \frac{\bar{\lambda} \rho + \bar{\mu} \rho^2}{(\mu - \lambda)^2} + \frac{2\lambda \bar{\mu}}{\mu^2 (\mu - \lambda)} \right] \\
 &= \frac{\lambda \bar{\lambda} + \mu \bar{\mu}}{(\mu - \lambda)^3}, \quad \rho < 1.
 \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

设  $M$  为 Geo/Geo/1 排队系统一个忙期  $\theta$  中服务完的顾客数, 则

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)}, \quad (6.1.25)$$

其中  $M_1, M_2, M_3, \cdots$ , 相互独立且均与  $M$  同分布. 记  $M(Z)$  为  $M$  的 PGF, 则

$$\begin{aligned}
 M(Z) &= E(Z^M) = ZE[ Z^{M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)}} ] \\
 &= Z \sum_{k=1}^{\infty} E[ Z^{M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(k)}} ] \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
 &= Z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k E[ Z^{M_1 + M_2 + \cdots + M_j} ] P\{N(k) = j\} \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
 &= Z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k [M(Z)]^j C_k^j \lambda^j \bar{\lambda}^{k-j} \mu \bar{\mu}^{k-1} \\
 &= Z \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]^k \mu \bar{\mu}^{k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Z \frac{\mu}{\bar{\mu}} \cdot \frac{\bar{\mu}[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]} \\
&= \frac{\mu Z[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]}, \quad (6.1.26)
\end{aligned}$$

即

$$\lambda \bar{\mu} M^2(Z) + (\lambda \mu Z + \bar{\lambda} \bar{\mu} - 1) M(Z) + \bar{\lambda} \mu Z = 0. \quad (6.1.27)$$

对上式两边关于  $Z$  求导数得

$$2\lambda \bar{\mu} M(Z) M'(Z) + \lambda \mu M(Z) + (\lambda \mu Z + \bar{\lambda} \bar{\mu} - 1) M'(Z) + \bar{\lambda} \mu = 0. \quad (6.1.28)$$

故

$$E(M) = M'(1) = \frac{\mu}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1). \quad (6.1.29)$$

对(6.1.28)两边再关于  $Z$  求导数,得

$$\begin{aligned}
&2\lambda \bar{\mu} [M'(Z)]^2 + 2\lambda \bar{\mu} M(Z) M''(Z) + 2\lambda \mu M'(Z) \\
&+ (\lambda \mu Z + \bar{\lambda} \bar{\mu} - 1) M''(Z) = 0.
\end{aligned}$$

令  $Z=1$  并注意到  $M'(1) = \frac{1}{1-\rho}$ , 得

$$2\lambda \bar{\mu} \frac{1}{(1-\rho)^2} + 2\lambda \bar{\mu} M''(1) + \frac{2\lambda \mu}{1-\rho} + (\lambda \mu + \bar{\lambda} \bar{\mu} - 1) M''(1) = 0.$$

从而

$$M''(1) = \frac{2\rho(1-\lambda)}{(1-\rho)^3}. \quad (6.1.30)$$

故

$$\begin{aligned}
D(M) &= M''(1) + M'(1) - [M'(1)]^2 \\
&= \frac{\rho^2 + \rho(1-2\lambda)}{(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1. \quad (6.1.31)
\end{aligned}$$

利用(6.1.25)式求  $E(M)$  与  $D(M)$  更简单. 由(6.1.18)式可得

$$\lambda \bar{\mu} Z [\theta(Z)]^2 + (\lambda \mu Z + \bar{\lambda} \bar{\mu} Z - 1) \theta(Z) + \bar{\lambda} \mu Z = 0. \quad (6.1.32)$$

由(6.1.32)式求  $E(\theta)$  与  $D(\theta)$  比由(6.1.18)求  $E(\theta)$  与  $D(\theta)$  简单得多.



### 6.1.3 等待时间

设  $W$  为 Geo/Geo/1 排队系统一个顾客的等待时间(的长). 对 FCFS 规则和早到达系统, 由于顾客在某时刻(设为  $n$  时刻)系统的队长(不包括该顾客)为  $k$  的概率是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n = k\} = \left(1 - \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right) \left(\frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right)^k$$

(见图 6-2), 所以

$$P\{W = 0\} = 1 - \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}.$$

当  $n \geq 1$  时, 由全概率公式和定理 1.1.2 以及几何分布的无记忆性得

$$\begin{aligned} P\{W = n\} &= \sum_{k=1}^n P\{W = n \mid \text{到达时系统有 } k \text{ 个顾客}\} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right) \left(\frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^n P\{B_1 + B_2 + \cdots + B_k = n\} \left(1 - \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right) \left(\frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \mu^k \bar{\mu}^{n-k} \left(1 - \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right) \left(\frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}\right)^k \\ &= (1 - \alpha) \mu \alpha (\mu \alpha + \bar{\mu})^{n-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

其中  $\alpha = \frac{\lambda \bar{\mu}}{\lambda \mu}$ , 即

$$P\{W = n\} = \begin{cases} 1 - \alpha, & n = 0, \\ \mu \alpha (1 - \alpha) (\mu \alpha + \bar{\mu})^{n-1}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.1.33)$$

从而

$$E(W) = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{W = n\} = \frac{\alpha}{\mu(1 - \alpha)}. \quad (6.1.34)$$

现考虑 LCFS 规则下的等待时间. 设  $W$  为 Geo/Geo/1 排队系统一个顾客的等待时间, 由于几何分布的无记忆性和(6.1.17)式, 有

$$W = \begin{cases} 0, & \text{以概率 } 1 - \alpha \\ B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)} = \theta, & \text{以概率 } \alpha. \end{cases} \quad (6.1.35)$$

所以  $W$  的 PGF  $W(Z)$  为

$$W(Z) = E[Z^W] = 1 - \alpha + \alpha\theta(Z). \quad (6.1.36)$$

故

$$W'(Z) = \alpha\theta'(Z), W''(Z) = \alpha\theta''(Z).$$

从而

$$E(W) = W'(1) = \frac{\alpha}{\mu - \lambda}, \quad \rho < 1, \quad (6.1.37)$$

$$\begin{aligned} D(W) &= W''(1) + W'(1) - [W'(1)]^2 \\ &= \alpha\theta''(1) + \alpha\theta'(1) - \alpha^2 [\theta'(1)]^2 \\ &= \alpha D(\theta) + (\alpha - \alpha^2) [\theta'(1)]^2 \\ &= \frac{\alpha(\lambda \bar{\lambda} + \mu \bar{\mu})}{(\mu - \lambda)^3} + \frac{\alpha - \alpha^2}{(\mu - \lambda)^2} \\ &= \frac{\alpha(\lambda \bar{\lambda} + \mu \bar{\mu} + \mu - \lambda - \mu\alpha + \lambda\alpha)}{(\mu - \lambda)^3}. \end{aligned} \quad (6.1.38)$$

## § 6.2 Geo/Geo/ $m$ 排队系统 ( $m \geq 1$ )

系统 Geo/Geo/ $m$  的到达间隔时间序列  $\{J_n, n \geq 1\}$  仍为 i.i.d 随机变量序列且  $J_n \sim \text{Geo}(\lambda)$ . 服务机构有  $m$  个服务台, 每个服务台的服务时间 (对每个顾客的服务时间) 相互独立同分布, 且均服从参数为  $\mu$  的几何分布. 仍用  $B$  表示每个服务台对每个顾客的服务时间. 由假设知  $B \sim \text{Geo}(\mu)$ , 并设到达间隔时间序列与各个服务台的服务时间相互独立, 每个服务台的所有服务时间也相互独立同分布.

### (1) 队长的平稳分布

仍以  $X_n, Y_n, Z_n$  分别表示早到达系统 Geo/Geo/ $m$  在  $n-, n, n+$  时系统中的顾客数, 因为

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \bar{\lambda} C_i^{i-j} \mu^{i-j} \bar{\mu}^j + \lambda C_i^{i-j+1} \mu^{i-j+1} \bar{\mu}^{j-1}, \\ \quad 0 \leq j \leq i \leq m-1, \\ \lambda \bar{\mu}^i, \quad j = i+1, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ \bar{\lambda} C_m^{i-j} \mu^{i-j} \bar{\mu}^{m+j-i} + \lambda C_m^{i+1-j} \mu^{i+1-j} \bar{\mu}^{m+j-i-1}, \\ \quad i-m \leq j \leq i, \quad i \geq m \\ \lambda \bar{\mu}^m, \quad j = i+1, \quad i \geq m, \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

(这里应用到一般规定: 当  $j > m$  时  $C_m^j = 0$ ). 从而知系统 Geo/Geo/ $m$  的嵌入过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  是齐次马氏链. 在

$$p_{ij} = \bar{\lambda} C_m^{i-j} \mu^{i-j} \bar{\mu}^{m+j-i} + \lambda C_m^{i+1-j} \mu^{i+1-j} \bar{\mu}^{m+j-i-1}, \quad i \geq m, \quad i-m \leq j \leq i$$

中令  $i+1-j = k$ , 则

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda} C_m^{i-j} \mu^{i-j} \bar{\mu}^{m+j-i} + \lambda C_m^{i+1-j} \mu^{i+1-j} \bar{\mu}^{m+j-i-1} \\ &= \lambda C_m^k \mu^k \bar{\mu}^{m-k} + \bar{\lambda} C_m^{k-1} \mu^{k-1} \bar{\mu}^{m-(k-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m+1. \end{aligned}$$

注意到:  $C_m^{-1} = C_m^{m+1} = 0$ . 记

$$\beta_k = \lambda C_m^k \mu^k \bar{\mu}^{m-k} + \bar{\lambda} C_m^{k-1} \mu^{k-1} \bar{\mu}^{m-(k-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, m+1. \quad (6.2.2)$$

则  $\{X_n, n \geq 0\}$  的转移概率矩阵为

$$p = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & \dots & \dots \\ p_{m-1,0} & p_{m-1,1} & \dots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} & 0 & \dots \\ \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \dots & \dots & \beta_1 \beta_0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \dots & \beta_1 \beta_0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \dots & \beta_1 \beta_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (6.2.3)$$

由此知  $\{X_n, n \geq 0\}$  是不可约非周期齐次马氏链. 由平稳分布定义, 有

$$\begin{cases} \pi_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i p_{i0} + \pi_m \beta_{m+1}, \\ \pi_k = \pi_k - p_{k-1,k} + \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} + \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1}, \quad 1 \leq k \leq m, \\ \pi_k = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_{k-1+i} \beta_i, \quad k > m. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

在  $\pi_k = \sum_{i=0}^{m+1} \pi_{k-1+i} \beta_i, k > m$  中令  $\pi_k = \sigma^k$ , 得

$$\sigma^k = \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^{k-1+i} \beta_i.$$

从而

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^i \beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^i [\lambda C_m^i \mu^i \bar{\mu}^{m-i} + \bar{\lambda} C_m^{i-1} \mu^{i-1} \bar{\mu}^{m+1-i}] \\ &= \lambda (\mu \sigma + \bar{\mu})^m + \bar{\lambda} \sigma (\mu \sigma + \bar{\mu})^m, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

即

$$\sigma = (\lambda + \bar{\lambda} \sigma) (\mu \sigma + \bar{\mu})^m. \quad (6.2.6)$$

解方程(6.2.6)可得  $\sigma$  的一个根 ( $0 < \sigma < 1$ ), 由此得

$$\pi_k = C \sigma^k, \quad k = m, m+1, \dots. \quad (6.2.7)$$

所以  $\{X_n, n \geq 0\}$  的平稳分布为

$$\{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-1}, C \sigma^m, C \sigma^{m+1}, \dots\}, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (6.2.8)$$

由(6.2.4)的第二式得

$$\begin{aligned} \pi_{k-1} &= \frac{\pi_k - \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} - \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1}}{p_{k-1,k}} \\ &= \frac{1}{\lambda \bar{\mu}^{k-1}} \left[ \pi_k - \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} - \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1} \right], \quad 1 \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

再由  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$  可确定  $C$ , 从而可得  $\{Z_n, n \geq 0\}$  的平稳分布. 因为当  $0 \leq k \leq m$  时

$$\begin{aligned} P\{Y_n = k\} &= \sum_{i=k}^m P\{X_n = i\} C_i^{i-k} \mu^{i-k} \bar{\mu}^k \\ &\quad + \sum_{i=1}^k P\{X_n = m+i\} C_m^{m+i-k} \mu^{m+i-k} \bar{\mu}^{k-i} \\ &\rightarrow \sum_{i=k}^m \pi_i C_i^{i-k} \mu^{i-k} \bar{\mu}^k + \sum_{i=1}^k \pi_{m+i} C_m^{m+i-k} \mu^{m+i-k} \bar{\mu}^{k-i}. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

当  $k \geq m+1$  时,

$$\begin{aligned} P\{Y_n = k\} &= \sum_{i=k-m}^m P\{X_n = m+i\} C_m^{m+i-k} \mu^{m+i-k} \bar{\mu}^{k-i} \\ &\rightarrow \sum_{i=k-m}^k \pi_{m+i} C_m^{m+i-k} \mu^{m+i-k} \bar{\mu}^{k-i}, \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

所以当  $(0 < \sigma < 1)$  时依照 (6.2.10) 与 (6.2.11) 式由  $\{X_n, n \geq 0\}$  的平稳分布  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  可求得  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的平稳分布  $\{\tilde{\pi}_k, k \geq 0\}$ .

## (2) $k(k \geq 0)$ 阶忙期

对 Geo/Geo/ $m$  排队系统, 我们现讨论其中  $k(k \geq 0)$  阶忙期的分布. 系统 Geo/Geo/ $m$  的  $k$  阶忙期定义为: 从有  $k$  个顾客在等待服务时起, 一直到首次有一个服务台空闲时止这段时间, 记为  $A_k$ . 而  $A_0$  是指系统中有  $m$  个顾客时起一直到首次有一个服务台空闲时止这段时间.

先来求  $A_0$  的 PGF. 因为  $m$  个服务台独立工作每个服务台的服务时间都服从参数为  $\mu$  的几何分布, 由于几何分布的无记忆, 当  $m$  个服务台都进入工作后, 这  $m$  个服务台可以看成服务时间为  $\min_{1 \leq i \leq m} \{B_i\}$  的一个服务台 (其中  $B_i$  为第  $i$  个服务台的服务时间). 由定理 1.1.5 的 (2) 知  $V = \min_{1 \leq i \leq m} \{B_i\} \sim \text{Geo}(1 - \bar{\mu}^m)$ . 从而  $A_0$  可以看成服务时间为  $\min_{1 \leq i \leq m} \{B_i\}$ , 到达间隔时间服从参数为  $\lambda$  的几

何分布的 Geo/Geo/1 排队系统的忙期再由 (6.1.18) 式知  $A_0$  的 PGF 为

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \bar{\mu}^m)Z[\lambda A_0(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}^m Z[\lambda A_0(Z) + \bar{\lambda}]}, \quad \lambda < 1 - \bar{\mu}^m, \quad (6.2.12)$$

从而

$$E(A_0) = \frac{1}{1 - \bar{\mu}^m - \lambda}, \quad \frac{\lambda}{1 - \bar{\mu}^m} < 1, \quad (6.2.13)$$

$$D(A_0) = \frac{\lambda \bar{\lambda} + (1 - \bar{\mu}^m) \bar{\mu}^m}{(1 - \bar{\mu}^m - \lambda)^2}, \quad \frac{\lambda}{1 - \bar{\mu}^m} < 1. \quad (6.2.14)$$

设  $M_0$  为在一个零阶忙期中服务完的顾客数, 则由 (6.1.26) 式,  $M_0$  的 PGF 为

$$M_0(Z) = \frac{(1 - \bar{\mu}^m)Z[\lambda M_0(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}^m[\lambda M_0(Z) + \bar{\lambda}]}, \quad (6.2.15)$$

且

$$E(M_0) = \frac{1 - \bar{\mu}^m}{1 - \bar{\mu}^m - \lambda}, \quad \lambda < 1 - \bar{\mu}^m, \quad (6.2.16)$$

$$D(M_0) = \frac{\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}(1 - 2\lambda)}{(1 - \tilde{\rho})^2}, \quad \tilde{\rho} \equiv \frac{\lambda}{1 - \bar{\mu}^m} < 1. \quad (6.2.17)$$

因为

$$A_k = A_{00} + A_{01} + \cdots + A_{0k}, \quad (6.2.18)$$

其中  $A_{0j}$  表示从系统 Geo/Geo/ $m$  中有  $k-j$  个顾客在等待服务时起一直到有  $k-j-1$  个顾客在等待服务时止这段时间,  $j=0, 1, \dots, k$ , 其中  $-1$  个顾客在等待服务表示有一个服务台空闲. 由于独立假设和几何分布的无记忆性知  $A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0k}$  相互独立且均与  $A_0$  同分布. 所以  $A_k$  的 PGF 为

$$A_k(Z) = [A_0(Z)]^{k+1}, \quad \lambda < 1 - \bar{\mu}^m. \quad (6.2.19)$$

$A_0(Z)$  由 (6.2.12) 式确定. 从而

$$E(A_k) = (k+1)/(1 - \bar{\mu}^m - \lambda), \quad \lambda < 1 - \bar{\mu}^m, \quad (6.2.20)$$

$$D(A_k) = \frac{(k+1)[\bar{\mu}^m(1-\bar{\mu}^m) + \lambda\bar{\lambda}]}{(1-\bar{\mu}^m-\lambda)^3}, \quad \lambda < 1-\bar{\mu}^m. \quad (6.2.21)$$

设  $M_k$  为在一个  $A_k$  中服务完的顾客数, 易见,  $M_k$  的 PGF 为

$$M_k(Z) = [M_0(Z)]^{k+1}, \quad \lambda < 1-\bar{\mu}^m, \quad (6.2.22)$$

其中  $M_0(Z)$  由 (6.2.15) 式确定, 且

$$E(M_k) = (k+1)E(M_0), \quad D(M_k) = (k+1)D(M_0). \quad (6.2.23)$$

### (3) 等待时间

设  $W$  为 Geo/Geo/ $m$  排队系统中一个顾客的等待时间 (的长), 在平稳条件满足下, 即  $0 < \tilde{\rho} < 1$  下, 当该顾客到达时队长为  $k$  ( $k \geq 0$ ) 的概率为  $\tilde{\pi}_k$ ,  $\tilde{\pi}_k$  由  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  确定, 而  $\{\pi_k, k \geq 0\}$  为嵌入过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  的平稳分布, 由本书的 (1) 确定. 于是有

$$P\{W = 0\} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\pi}_k, \quad (6.2.24)$$

$$P\{W = n\} = \sum_{k=m}^{n+m-1} P\left\{\sum_{i=1}^{k-m+1} V_i = n\right\} \tilde{\pi}_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.25)$$

其中  $V_1, V_2, V_3 \dots$  相互独立, 均与  $V \sim \text{Geo}(1-\bar{\mu}^m)$  同分布. 由定

理 1.1.2 知  $\sum_{i=1}^{k-m+1} V_i$  服从负二项分布 (巴斯卡分布):

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k-m+1} V_i = n\right\} = C_{n-1}^{k-m} (1-\bar{\mu}^m)^{k-m+1} (\bar{\mu}^m)^{n+m-k-1}, \quad (6.2.26)$$

$$\text{即 } P\{W = n\} = \sum_{k=m}^{n+m-1} C_{n-1}^{k-m} (1-\bar{\mu}^m)^{k-m+1} (\bar{\mu}^m)^{n+m-k-1} \tilde{\pi}_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (6.2.27)$$

## § 6.3 Geo/G/1 排队系统

系统 Geo/G/1 与系统 Geo/Geo/1 的惟一区别是系统 Geo/G/1 的服务时间  $B$  服从取正整数值的一般分布. 设  $g_k = P\{B = k\}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $E(B) = \frac{1}{\mu}$ ,  $E(B^2) = b^{(2)}$ .

### 6.3.1 队长的平稳分布

设  $Q_n$  表示迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 中第  $n$  个顾客服务完(离开系统)时系统中的顾客数.  $A_n$  为第  $n$  个顾客服务期间到达系统中的顾客数,  $B_n$  为第  $n$  个顾客服务时间,  $B_n$  与  $B$  同分布. 因为

$$A_{n+1} = N(B_{n+1}), \quad (6.3.1)$$

$$Q_{n+1} = Q_n - \epsilon(Q_n) + A_{n+1}, \quad (6.3.2)$$

其中

$$\epsilon(X) = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ 1, & X > 0, \end{cases} \quad (6.3.3)$$

从而  $A_{n+1}$  的 PGF(记为  $A(Z)$ )为

$$\begin{aligned} A(Z) &= E[Z^{A_{n+1}}] = E[Z^{N(B)}] = \sum_{n=1}^{\infty} E[Z^{N(n)}] P\{B = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n Z^k P\{N(n) = k\} P\{B = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n Z^k C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k} P\{B = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda z + \bar{\lambda}]^n P\{B = n\} \\ &= B(\lambda Z + \bar{\lambda}), \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

其中  $B(Z)$  为  $B$  的 PGF. 由(6.3.2)式得

$$\begin{aligned} P\{Q_{n+1} = j \mid Q_n = i\} &= P\{A_{n+1} = j + \epsilon(i) - i\} \\ &= P\{N(B) = j + \epsilon(i) - i\} \end{aligned}$$



$$= \begin{cases} P\{N(B) = j+1-i\}, i \geq 1 \\ P\{N(B) = j\}, i = 0. \end{cases} \quad (6.3.5)$$

从而知嵌入过程  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是齐次马氏链. 设  $k_j = P\{N(B) = j\}, j \geq 0$ , 则  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的转移概率矩阵为

$$P_Q = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (6.3.6)$$

易见

$$k_j = P\{N(B) = j\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^j \lambda^j \bar{\lambda}^{n-j} g_n, g_n = P\{B = n\}. \quad (6.3.7)$$

由(6.3.6)式易证:

(a)  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是不可约的  $\Leftrightarrow 0 < k_0 \leq k_0 + k_1 < 1$ ,

(b) 如果  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是不可约的, 则  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是非周期的.

证 (a) 设  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是不可约的, 如果  $k_0 = 0$ , 则  $p_{ij} \triangleq p\{Q_{n+1} = j | Q_n = i\}$  对于所有  $j < i$  均为 0, 于是对  $j < i, i \rightarrow j$ ,  $\{Q_n, n \geq 1\}$  不是不可约的.

如果  $k_0 + k_1 = 1$ , 则对于  $i > 1$  有  $p_{0i} = 0$  且  $p_{1i} = 0$ , 这样不能由 0 或 1 到达  $i (> 1)$ . 于是  $\{Q_n, n \geq 1\}$  不是不可约的. 反之设  $0 < k_0 < 1$  且  $0 < k_0 + k_1 < 1$ , 则至少存在一个正整数  $r > 1$  使得  $k_r > 0$ , 首先对任意  $j < i, p_{ij}(i-j) = k_0^{i-j} > 0$ , 于是  $i \rightarrow j$ . 如果  $j > i > 1$ , 则总能找到  $k$  与  $l$  使得  $P_{ij}(k+l) = k^k k_0^l > 0$ , 例如, 设  $j = 5, i = 2, r = 3$ , 则

$$i \xrightarrow{k_r} i+r-1=4 \xrightarrow{k_r} i+2(r-1)=6 \xrightarrow{k_0} i+2(r-1)-1=5,$$

即  $p_{25}(2+1) = k^2 k_0^1 > 0, k=2, l=1$ . 所以  $2 \rightarrow 5$ . 又如设  $i = 5, j =$

$7, r = 2$ , 则  $5 = i \xrightarrow{k_r} i+r-1 = 6 \xrightarrow{k_r} i+2(r-1) = 7 = j$ ,

即  $p_{57}(2+0) = k_r^2 k_0^0 = k_r^2 > 0$ . 所以  $5 \rightarrow 7$ , 当  $i=0$  时, 也可找到  $k$  与  $l$ , 使得  $p_{ij}(1+k+l) = k_r^{1+k} k_0^l > 0$ .

例如, 设  $i=0, j=3, r=5$ , 则  $i \xrightarrow{k_r} r=5 \xrightarrow{k_0} r-1=4 \xrightarrow{k_0} r-2=3$ , 即  $p_{03}(1+2) = k_r^1 k_r^2 > 0, k=0, l=2$ , 所以  $0 \rightarrow 3$ . 又如设  $i=0, j=6, r=2$ , 则  $i \xrightarrow{k_r} r=2 \xrightarrow{k_r} r+r-1=3 \xrightarrow{k_r} r+3(r-1)=4 \xrightarrow{k_r} r+3(r-1)=5=j \xrightarrow{k_r} r+4(r-1)=6=j$ , 即  $p_{06}(1+4=0) = k_r^5 k_0^0 = k_r^5 > 0$  所以  $0 \rightarrow 6$ . 又因  $p_{00} = k_0 > 0$ , 当  $i \geq 1$  时  $p_{ii}(r) = k_r k_0^{r-1} > 0$ , 所以对任意  $i \geq 0$ , 有  $i \leftrightarrow i$ . 从而对任意  $i, j \geq 0$ , 有  $i \leftrightarrow j$ . 于是  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是不可约的.

(b) 因为  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是不可约的, 又因  $p_{00} = k_0 > 0$  所以 0 是非周期的, 从而  $\{Q_n, n \geq 1\}$  是非周期的.

由(6.3.6)式与平稳分布定义, 得

$$\pi_j = \pi_0 k_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i k_{j-i+1}, \quad j \geq 0. \quad (6.3.8)$$

设  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的平稳分布  $\{\pi_j, j \geq 0\}$  的概率母函数为  $Q(Z)$ , 则

$$\begin{aligned} Q(Z) &= \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} k_j Z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i k_{j-i+1} Z_j \\ &= \pi_0 B(\lambda Z + \bar{\lambda}) + \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \sum_{m=0}^j \pi_{m+1} k_{j-m} \\ &= \pi_0 B(\lambda Z + \bar{\lambda}) + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{j=m}^{\infty} \pi_{m+1} Z^j k_{j-m} \right) \\ &= \pi_0 B(\lambda Z + \bar{\lambda}) + \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{m+1} \sum_{i=0}^{\infty} Z^{m+i} k_i \\ &= \pi_0 B(\lambda Z + \bar{\lambda}) + \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{m+1} Z^m B(\lambda Z + \bar{\lambda}), \\ &= \pi_0 B(\lambda Z + \bar{\lambda}) + [Q(Z) - \pi_0] \frac{B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{Z} \end{aligned}$$

即

$$Q(Z) = \frac{\pi_0(1-Z)B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{B(\lambda Z + \bar{\lambda}) - Z}. \quad (6.3.9)$$

$$\text{令 } Z=1, \text{ 可得 } \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \quad (6.3.10)$$

因为  $\pi_0$  为概率, 所以  $0 \leq \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \leq 1$ . 但是当  $\pi_0 = 0$  时,  $Q(Z) \equiv 0$ , 平稳分布不存在, 当  $\pi_0 = 1$  时,  $0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \dots$ . 所以这时平稳也不存在. 故只有当  $0 < 1 - \frac{\lambda}{\mu} < 1$  时即当  $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$  时平稳分布存在, 且其 PGF 由 (6.3.9) 式给出. 从而  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = j\}$ , 记  $P\{Q = j\} = \pi_j$ . 则

$$E(Q) = Q'(1) = \rho + \frac{\lambda^2 \left( b^{(2)} - \frac{1}{\mu} \right)}{2(1-\rho)}, \quad \rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (6.3.11)$$

平均排(等待)队长为

$$E(Q_q) = \frac{\lambda^2 \left( b^{(2)} - \frac{1}{\mu} \right)}{2(1-\rho)}, \quad \rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (6.3.12)$$

现考虑早到达系统 Geo/G/1 的队长的平稳分布. 设  $R_n$  为早到达系统 Geo/G/1 中第  $n$  个顾客服务完离开系统时系统中的顾客数, 则

$$R_{n+1} = \begin{cases} R_n - 1 + A_{n+1}, & \text{当 } R_n \geq 1 \text{ 时,} \\ C_{n+1}, & \text{当 } R_n = 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (6.3.13)$$

其中  $C_{n+1}$  为在  $R_n = 0$  条件下, 第  $n+1$  个顾客服务时间中到达的顾客. 记  $P\{C_{n+1} = j\} = c_j, j \geq 0$  则因为系统是早到达的, 在  $R_n = 0$  的条件下, 第  $n+1$  个顾客在第  $n$  个顾客离开系统后某时刻  $S$  到达, 即在  $(S, S+)$  中到达, 因此在  $(S+, S+1)$  中不可能再有顾客到达. 又因第  $n+1$  个到达后 (因  $R_n = 0$ ) 立刻进入服务, 所以在他服务的第 1 个单位时间中, 即在  $(S, S+1)$  中不可能有 (除他外) 顾客到达. 从而

$$C_j = P\{C_{n+1} = j\} = P\{N(B_{n+1}) = j \mid R_n = 0\}$$

$$= \sum_{k=j+1}^{\infty} P\{N(k-1) = j\} g_k = \sum_{k=j+1}^{\infty} C_{k-1j} \lambda^j \bar{\lambda}^{k-1-j} g_k. \quad (6.3.14)$$

$C_{n+1}$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} Z^j C_j &= \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \sum_{k=j+1}^{\infty} C_{k-1j} \lambda^j \bar{\lambda}^{k-1-j} g_k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \sum_{i=j}^{\infty} C_i^j \lambda^j \bar{\lambda}^{i-j} g_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^i C_i^j (\lambda Z)^j \bar{\lambda}^{i-j} \right) g_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda Z + \bar{\lambda})^i g_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda Z + \bar{\lambda})^{i+1} g_{i+1} / (\lambda Z + \bar{\lambda}) \\ &= \frac{B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{\lambda Z + \bar{\lambda}}. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

由(6.3.13)式得

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{R_{n+1} = j \mid R_n = i\} \\ &= \begin{cases} P\{A_{n+1} = j+1-i\} = k_{j+1-i}, i \geq 1 \\ P\{C_{n+1} = j\} = C_j, i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

由(6.3.14)与(6.3.16)式知嵌入过程  $\{R_n, n \geq 1\}$  是齐次马氏链, 且其转移概率矩阵为

$$P_R = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (6.3.17)$$

类似于过程  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的讨论, 对于过程  $\{R_n, n \geq 1\}$  有如下结论:

(a)  $\{R_n, n \geq 1\}$  是不可约的  $\Leftrightarrow 0 < k_0 \leq k_0 + k_1 < 1$ .

(b) 如果  $\{R_n, n \geq 1\}$  是不可约的, 则  $\{R_n, n \geq 1\}$  是非周期的.

(c) 如果  $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , 则  $\{R_n, n \geq 1\}$  的平稳分布存在.

由平稳分布定义有

$$\pi_j = \pi_0 c_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i k_{j+1-i}, \quad j \geq 0. \quad (6.3.18)$$

记  $\{R_n, n \geq 1\}$  的平稳分布的 PGF 为  $R(Z)$ , 由 (6.3.18) 式, 用类似于求 (6.3.9) 式的方法, 可得

$$R(Z) = \frac{\pi_0 \bar{\lambda} (1-Z) B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{(\lambda Z + \bar{\lambda}) [B(\lambda Z + \bar{\lambda}) - Z]},$$

其中  $\pi_0 = \frac{1-\rho}{\lambda}$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , 即

$$R(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{(\lambda Z + \bar{\lambda}) [B(\lambda Z + \bar{\lambda}) - Z]}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (6.3.19)$$

从而得平均队长

$$E(R) = R'(1) = \frac{\lambda^2 \left[ b^{(2)} - \frac{1}{\mu} \right]}{2(1-\rho)} + \rho - \lambda, \quad \rho < 1. \quad (6.3.20)$$

### 6.3.2 忙期

设  $\theta$  为迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 的忙期(的长), 则

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}. \quad (6.3.21)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$  为相互独立且均与  $\theta$  同分布的随机变量, 记  $\theta$  的 PGF 为  $\theta(Z)$ . 则

$$\begin{aligned} \theta(Z) &= E[Z^{B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(n)}}] g_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \sum_{i=0}^{\infty} E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_i}] C_n^i \lambda^i \bar{\lambda}^{n-i} g_n, \quad (\theta_0 = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n (\lambda \theta(Z) + \bar{\lambda})^n g_n \\
&= B[\lambda Z \theta(Z) + \bar{\lambda} Z].
\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

故

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu - \lambda}, \lambda < \mu. \tag{6.3.23}$$

因为  $\lambda_0 = \lambda$ , 所以对于迟到达延迟服务系统 Geo/G/1 (2.3.11) 式也成立. 因为

$$\theta''(1) = \frac{\mu b^{(2)} - 1 + 2\rho - 2\rho^2}{\mu(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1, \tag{6.3.24}$$

所以

$$D(\theta) = \theta''(1) + \theta'(1) - [\theta'(1)]^2 = \frac{\mu^2 b^{(2)} - \mu\rho^2 - 1 + \rho}{\mu^2(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1, \tag{6.3.25}$$

设  $M$  为一个  $\theta$  中服务完的顾客数. 则

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)},$$

其中  $M_1, M_2, M_3, \dots$  相互独立且均与  $M$  同分布. 从而  $M$  的 PGF 为

$$\begin{aligned}
M(Z) &= E[Z^{1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}}] \\
&= ZB[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}].
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

故

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, \quad \rho < 1. \tag{6.3.27}$$

由 (6.3.25) 式知

$$\begin{aligned}
D(M) &= E[N(B)]D(M) + D[N(B)][E(M)]^2 \\
&= \rho D(M) + \frac{D[N(B)]}{(1-\rho)^2} = \frac{D[N(B)]}{(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1.
\end{aligned} \tag{6.3.28}$$

因为

$$E[N^2(B)] = \sum_{N=1}^{\infty} g_n E[N^2(n)] = \sum_{N=1}^{\infty} g_n [n\lambda + n(n-1)\lambda^2]$$

$$\begin{aligned}
&= \rho + \lambda^2 \left[ b^{(2)} - \frac{1}{\mu} \right] = \rho + \lambda^2 b^{(2)} - \lambda \rho \\
&= \lambda^2 b^{(2)} + \bar{\lambda} \rho,
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

所以

$$D[N(B)] = \lambda^2 b^{(2)} + \bar{\lambda} \rho - \rho^2, \quad \rho < 1. \tag{6.3.30}$$

故

$$D(M) = \frac{\lambda^2 b^{(2)} + \bar{\lambda} \rho - \rho^2}{(1 - \rho)^3}, \quad \rho < 1. \tag{6.3.31}$$

### 6.3.3 等待时间的分布

设  $W, T$  分别为 Geo/G/1 排队系统一个顾客的等待时间与逗留时间, 对 FCFS 的迟到达延迟进入系统有

$$Q(Z) = E(Z^{N(T)}). \tag{6.3.32}$$

记  $T(Z) = E(Z^T)$ . 因为

$$\begin{aligned}
E[Z^{N(T)}] &= \sum_{N=1}^{\infty} E[Z^{N(n)}] P\{T = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda Z + \bar{\lambda}]^n P\{T = n\} \\
&= T(\lambda Z + \bar{\lambda}),
\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

由(6.3.32)式得

$$T(\lambda Z + \bar{\lambda}) = Q(Z) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{B(\lambda Z + \bar{\lambda}) - Z}.$$

令  $\lambda Z + \bar{\lambda} = s$  得  $T(s) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)B(s)}{\lambda B(s) + \bar{\lambda} - s}$  再把  $s$  换成  $z$ , 得

$$T(Z) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)B(Z)}{\lambda B(Z) + \bar{\lambda} - Z}. \tag{6.3.34}$$

又因  $T = W + B$  且  $W$  与  $B$  独立, 所以  $W$  的 PGF 为

$$W(Z) = \frac{(1 - \rho)(1 - Z)}{\lambda B(Z) + \bar{\lambda} - Z}. \tag{6.3.35}$$

因为  $Q = N(T) = N(W + B)$ , 所以  $E(Q) = E[N(T)] = \lambda E(T)$ , 故由(6.3.11)式得

$$E(T) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda b^{(2)} - \rho}{2(1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \tag{6.3.36}$$

从而得

$$E(W) = E(T) - E(B) = \frac{\lambda b^{(2)} - \rho}{2(1 - \rho)}. \quad (6.3.37)$$

因为

$$\begin{aligned} E[N^2(T)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[N^2(n)] P\{T = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [n\lambda + n(n-1)\lambda^2] P\{T = n\} \\ &= \lambda E(T) + \lambda^2 [E(T^2) - E(T)] \\ &= E(Q) + \lambda^2 E(T^2) - \lambda E(Q) \\ &= \bar{\lambda} E(Q) + \lambda^2 E(T^2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D(Q) = D[N(T)] &= E[N^2(T)] - \{E[N(T)]\}^2 \\ &= E(Q)\bar{\lambda} + \lambda^2 E(T^2) - \lambda^2 [E(T)]^2 \\ &= \bar{\lambda} E(Q) + \lambda^2 D(T), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} D(T) &= \frac{1}{\lambda^2} [D(Q) - \bar{\lambda} E(Q)] \\ &= \frac{D(Q)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda\mu} - \frac{\bar{\lambda} \left( b^{(2)} - \frac{1}{\mu} \right)}{2(1 - \rho)}, \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

$$D(W) = D(T) - D(B) = D(T) - b^{(2)} - \frac{1}{\mu^2}. \quad (6.3.39)$$

设  $W$  为迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 中一个顾客在 LCFS 规则下的等待时间, 则有

$$W = B_+ + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B_+)}, \quad W > 0, \quad (6.3.40)$$

其中  $B_+$  为  $B$  的剩余寿命, 由 (3.3.51) 式知,  $B_+$  的 PGF 为

$$B_+(Z) = \frac{\mu[1 - B(Z)]}{1 - Z}. \quad (6.3.41)$$



从而

$$E(B_+) = B'_+(1) = \frac{\mu b^2 - 1}{2}. \quad (6.3.42)$$

所以  $W$  的 PGF 为(由(6.3.10))

$$\begin{aligned} W(Z) &= E(Z^W) = 1 - \rho + \rho E[Z^{B_+ + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{N(B_+)}}] \\ &= 1 - \rho + \rho B_+ [\lambda Z \theta(Z) + \bar{\lambda} Z] \\ &= 1 - \rho + \frac{\lambda - \lambda B_+ [\lambda Z \theta(Z) + \bar{\lambda} Z]}{1 - \lambda Z \theta(Z) - \bar{\lambda} Z}, \quad \rho < 1. \end{aligned} \quad (6.3.43)$$

由(6.3.40)与(6.3.42)式得

$$\begin{aligned} E(W) &= \rho [E(B_+) + E(\theta) \lambda E(B_+)] = \rho \left[ E(B_+) + \frac{\lambda E(B_+)}{\mu - \lambda} \right] \\ &= \rho E(B_+) \frac{\mu}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda b^{(2)} - \rho}{2(1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \end{aligned} \quad (6.3.44)$$

## § 6.4 Geo<sup>ξ</sup>/G/1 排队系统

系统 Geo/G/1 与系统 Geo<sup>ξ</sup>/G/1 的惟一区别是系统 Geo<sup>ξ</sup>/G/1 每次到达的顾客数不是一个,而是一批(ξ个). ξ 为取正整数值的一般随机变量,  $E(\xi) = r$ ,  $D(\xi) = \sigma_r^2$ , 且设 ξ 与诸  $B_n$ 、诸  $J_n$  相互独立, 各次到达的顾客数相互独立同分布.

### 6.4.1 队长的平稳分布

设  $Q_n$  为迟到达延迟进入的 Geo<sup>ξ</sup>/G/1 中第  $n$  个顾客服务完(离开系统)时系统中的顾客数,  $A_n$  为第  $n$  个顾客服务时间中到达的顾客数, 则

$$Q_{N+1} = Q_N - \epsilon(Q_N) + A_{N+1} + (\xi - 1)\epsilon(1 - Q_N), \quad (6.4.1)$$

其中  $\epsilon(x)$  由(6.3.3)式确定. 因为

$$A_{n+1} = \xi_1, \xi_2, \xi_3, + \dots + \xi_{N(B_{n+1})} (\xi_0 \equiv 0), \quad (6.4.2)$$

其中  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, + \dots$  相互独立均与 ξ 同分布, 所以

$$E(A_{n+1}) = E(\xi_1)E[N(B_{n+1})] = \frac{\lambda r}{\mu} \triangleq \rho. \quad (6.4.3)$$

为保证  $\{Q_n, n \geq 1\}$  的平稳分布存在, 在一个顾客的服务时间里到达的顾客数的均值必须小于 1, 即  $\rho = \frac{\lambda r}{\mu} < 1$ . 又由 (6.4.2) 知

$$\begin{aligned} D(A_{n+1}) &= E[N(B_{n+1})]D(\xi) + D[N(B_{n+1})]\{E(\xi_1)\}^2 \\ &= \sigma_r^2 \frac{\lambda}{\mu} + D[N(B_{n+1})]r^2 \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\sigma_r^2 + r^2 \left[ \frac{\lambda}{\mu} + \lambda^2(b^{(2)} - \frac{1}{\mu}) - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\sigma_r^2 + r\rho + \lambda^2 r^2 b^{(2)} - \lambda r\rho - \rho^2. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

$A_{n+1}$  的 PGF (记为  $A(Z)$ ) 为

$$\begin{aligned} A(Z) &= E[Z^{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{N(B_{n+1})}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda\xi(z) + \bar{\mu}]^n P\{B = N\} \\ &= B[\lambda\xi(Z) + \bar{\lambda}], \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

其中  $\xi(Z)$  为  $\xi$  的 PGF. 由 (6.4.1) 式得

$$\begin{aligned} E[Z^{Q_{n+1}}] &= E[Z^{Q_n - \epsilon(Q_n) + A_{n+1} + (\xi-1)\epsilon(1-Q_n)}] \\ &= B[\lambda\xi(Z) + \bar{\lambda}]E[Z^{Q_n - \epsilon(Q_n) + (\xi-1)\epsilon(1-Q_n)}]. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

因为

$$\begin{aligned} &E[Z^{Q_n - \epsilon(Q_n) + (\xi-1)\epsilon(1-Q_n)}]P\{Q_n = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[Z^{k - \epsilon(k) + (\xi-1)\epsilon(1-k)}]P\{Q_n = k\} \\ &= E[Z^{\xi-1}]P\{Q_n = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} E[Z^{k-1}]P\{Q_n = k\} \\ &= \frac{1}{Z}\xi(Z)P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{Z}\{E(Z^{Q_n}) - P[Q_n = 0]\} \\ &= \frac{1}{Z}P\{Q_n = 0\}[\xi(Z) - 1] + \frac{1}{Z}E[Z^{Q_n}], \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

记

$$\tilde{\pi}_R = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{Q_n = k\}, \quad Q(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Z^{Q_n}),$$

在  $\rho < 1$  条件下, 令  $n \rightarrow \infty$ , 由 (6.4.7) 式得

$$Q(Z) = \left\{ \frac{\tilde{\pi}_0}{Z} [\xi(Z) - 1] + \frac{Q(Z)}{Z} \right\} A(Z),$$

即

$$Q(Z) = \frac{\tilde{\pi}_0 [1 - \xi(Z)] B[\lambda \xi(Z) + \bar{\lambda}]}{B[\lambda \xi(Z) + \bar{\lambda}] - Z}. \quad (6.4.8)$$

令  $Z = 1$ , 得

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{1 - \rho}{r}. \quad (6.4.9)$$

从而

$$Q(Z) = \frac{(1 - \rho) [1 - \xi(Z)] B[\lambda \xi(Z) + \bar{\lambda}]}{r B[\lambda \xi(Z) + \bar{\lambda}] - rZ}, \quad (6.4.10)$$

且

$$\begin{aligned} E[Q] = Q'(1) &= \rho + \frac{E[\xi(\xi - 1)] + r^3 \lambda^2 [b^{(2)} - \frac{1}{u}]}{2r(1 - \rho)} \\ &= \rho + \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r + \lambda^2 b^{(2)} - \mu r \rho^2}{2(1 - \rho)}. \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

## 6.4.2 忙期

像 3.3.3 节那样, 仍用  $\Theta$  表示由一批 ( $\xi$  个) 顾客引出的忙期, 用  $\theta$  表示由一个顾客引出的忙期. 则有

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\xi} \theta, \quad (6.4.12)$$

$$\theta = B + \Theta_1 + \Theta \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B)}, \quad (6.4.13)$$

$$\Theta = U + \Theta_1 + \Theta_2 \cdots + \Theta_{N(U)}, \quad (6.4.14)$$

其中

$$U = \sum_{i=1}^{\xi} B. \quad (6.4.15)$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$  相互独立均与  $\Theta$  同分布;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$  相互独立均与  $\theta$  同分布.  $\Theta, \theta, U$  的 PGF 分别为  $\Theta(Z), \theta(Z), U(Z)$ . 则用类似于 3.3.3 节的方法, 得

$$\Theta(Z) = \xi[\theta(Z)], \quad (6.4.16)$$

$$\theta(Z) = B[\lambda Z \Theta(Z) + \bar{\lambda} Z] = B\{\lambda Z \xi[\theta Z] + \bar{\lambda} Z\}, \quad (6.4.17)$$

$$U(Z) = \xi[B(Z)], \quad (6.4.18)$$

$$\Theta(Z) = U[\lambda Z \Theta(Z) + \bar{\lambda} Z] = \xi\{B[\lambda Z \Theta(Z) + \bar{\lambda} Z]\}, \quad (6.4.19)$$

且

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu - \lambda r}, \quad \rho \triangleq \frac{\lambda r}{\mu} < 1, \quad (6.4.20)$$

$$E(\Theta) = \frac{r}{\mu - r\lambda}, \quad \rho < 1, \quad (6.4.21)$$

$$D(\Theta) = \frac{\sigma_r^2 + 2r^2 - r + r\mu^2 b^{(2)} - r\mu\rho^2 - r\rho}{\mu^2 (1 - \rho)^3}, \quad \rho < 1, \quad (6.4.22)$$

$$D(\theta) = \frac{\rho\sigma_r^2 + 2r^2 - r + r\mu^2 b^{(2)} - r\mu\rho^2 - r\rho}{r\mu^2 (1 - \rho)^3}, \quad \rho < 1. \quad (6.4.22')$$

设  $\sum$  表示在一个  $\Theta$  中服务完的顾客数,  $M$  表示在一个  $\theta$  中服务完的顾客数, 则

$$\sum = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \quad (6.4.23)$$

$$M = 1 + \sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{N(B)}, \quad (6.4.24)$$

$$\sum = \xi + \sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{N(U)}, \quad (6.4.25)$$

其中  $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \dots$  相互独立均与  $\sum$  同分布,  $M_1, M_2, M_3, \dots$  相互独立均与  $M$  同分布, 则有

$$\sum(Z) = \xi[M(Z)], \quad (6.4.26)$$

$$M(Z) = ZB[\lambda \sum(Z) + \bar{\lambda}] = ZB\{\lambda \xi[M(Z)] + \bar{\lambda}\}, \quad (6.4.27)$$

$$\sum(Z) = \xi\{ZB[\lambda \sum(Z) + \bar{\lambda}]\}, \quad (6.4.28)$$

且

$$E(\sum) = rE(M) = \frac{r}{1-\rho}, \quad \rho < 1, \quad (6.4.29)$$

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, \quad \rho < 1. \quad (6.4.30)$$

因为

$$D(\sum) = \frac{\sigma_r^2 - r\rho^2 + r^2\rho + \lambda^2 r^3 b^{(2)} - \lambda\rho r^2}{(1-\rho)^3}$$

$$D(\sum) = \gamma D(M) + \sigma_r^2 [E(M)]^2 = \gamma D(M) + \frac{\sigma_r^2}{(1-\rho)^2}, \quad (6.4.31)$$

故

$$\begin{aligned} D(M) &= \frac{1}{\gamma} \left[ D(\sum) - \frac{\sigma_r^2(1-\rho)}{(1-\rho)^2} \right] \\ &= \frac{\rho\sigma_r^2 - \gamma\rho^2 + \gamma^2\rho + \lambda^2\gamma^3 b^{(2)} - \lambda\gamma^2\rho}{\gamma(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1. \end{aligned} \quad (6.4.32)$$

### 6.4.3 等待时间的分布

设  $W$  为排队系统  $\text{Geo}^\xi/G/1$  的等待时间,  $\rho < 1$ .

(1) FGFS 规则下  $W$  的分布

类似于 3.3.4 节,  $W$  由两部分组成, 一部分是该顾客所在批的等待时间, 记为  $W_f$ , 另一部分是该顾客在批中的等待时间, 记为  $W_s$ , 即

$$W = W_f + W_s. \quad (6.4.33)$$

因为  $W_f$  与  $W_s$  独立所以有

$$W(Z) = W_f(Z) W_s(Z). \quad (6.4.34)$$

因为系统  $\text{Geo}^\xi/G/1$  的  $W_f$  可以看成为服务时为  $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i$  的  $\text{Geo}/G/1$  排队系统的等待时间, 再由(6.3.35)式知,  $W_f$  的 PGF 为

$$\begin{aligned} W_f(Z) &= \frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda U(Z) + \bar{\lambda} - Z} \quad [\text{由(6.4.18)}] \\ &= \frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda \xi[B(Z)] + \bar{\lambda} - Z}, \quad \rho = \frac{\lambda r}{\mu} < 1 \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

在长为  $\xi$  的批队列中, 设在该顾客之前的顾客数为  $\xi$ , 则  $\xi$  为取非负整数值的随机变量, 且有

$$W_s(Z) = \sum_{i=1}^{\xi} B_i \quad (B_0 \equiv 0). \quad (6.4.36)$$

由(3.3.51)式知,  $W_s$  的 PGF 为

$$W_s(Z) = \xi[B(Z)] = \frac{1 - \xi[B(Z)]}{r[1 - B(Z)]}. \quad (6.4.37)$$

由(6.4.35)与(6.4.37)式,  $W$  的 PGF 为

$$W(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda \xi[B(Z)] + \bar{\lambda} - Z} \cdot \frac{1 - \xi[B(Z)]}{r[1 - B(Z)]} \quad (6.4.38)$$

且

$$\begin{aligned} E(W) &= E(W_f) + E(W_s) = \frac{\lambda E(U^2) - \rho}{2(1-\rho)} + E(\xi)E(B) \\ &= \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{2r\mu} + \frac{\lambda E(U^2) - \rho}{2(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (6.4.39)$$

又因

$$\begin{aligned} E(U^2) &= D(U) + [E(U)]^2 = rD(B) + \sigma_r^2 \frac{1}{\mu^2} + \frac{\gamma^2}{\mu^2} \\ &= r b^{(2)} - \frac{r}{\mu^2} + \frac{\sigma_r^2}{\mu^2} + \frac{r^2}{\mu^2}, \end{aligned} \quad (6.4.40)$$

故

$$E(W) = \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r}{2r\mu} + \frac{\lambda r^2 \mu^2 b^{(2)} - \lambda r + \lambda r \sigma_r^2 + \lambda r^3 - r^2 \mu}{2r\mu^2(1-\rho)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda r^2 \mu^2 b^{(2)} - \lambda r^2 \mu + \mu \sigma_r^2 + r^2 \mu - r \mu}{2 r \mu^2 (1 - \rho)} \\
&= \frac{\lambda r^2 \mu b^{(2)} - \lambda r^2 + \sigma_r^2 + r^2 - r}{2 r \mu (1 - \rho)}, \quad \rho < 1. \quad (6.4.41)
\end{aligned}$$

(2) LCFS 规则下  $W$  的分布

类似于(1)有

$$W = W_f + W_s. \quad (6.4.42)$$

因为  $W_f$  和  $W_s$  独立, 且当  $W_f > 0$  时

$$W_f = B_+ + \Theta_1 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}, \quad (6.4.43)$$

所以  $W_f$  的 PGF 为(设到达时系统空的概率为  $\pi_0$ )

$$\begin{aligned}
W_f(Z) &= \pi_0 + (1 - \pi_0) E[Z^{B_+} + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}] \\
&= \pi_0 + (1 - \pi_0) B_+ [\lambda Z \Theta(Z) + \bar{\lambda} Z] \\
&= \pi_0 + (1 - \pi_0) \frac{\mu \{1 - B[\lambda Z \Theta(Z) + \bar{\lambda} Z]\}}{1 - \lambda Z \Theta(Z) - \bar{\lambda} Z}. \quad (6.4.44)
\end{aligned}$$

## § 6.5 Geo/Geo/· 系统的忙期

我们定义忙期为服务器(员)连续服务的时间间隔, 定义  $k$  阶忙期为从系统中有  $k$  个信元(顾客)时起到系统空(没有顾客)时止这段时间, 而定义  $k$  阶繁忙期为从系统中有  $k$  个信元在等待服务(不包括正在服务信元)时起到有一个服务器(服务台)空闲时止这段时间. 忙期的长、 $k$  阶忙期的长和  $k$  阶繁忙期的长分别记为  $k$ ,  $W_k$ ,  $A_k$ . 简称零阶繁忙期  $A_0$  为繁忙期, 它被定义为从系统中所有服务台都进入服务时起到有一个服务台空闲时止这段时间. 排队系统 Geo/Geo/· 是这样的系统: (1) 到达间隔时间序列  $\{J_j, j \geq 1\}$  是一个独立随机变量序列,  $J_j \sim \text{Geo}(\lambda_j)$ ,  $\lambda_j$  是系统状态(系统中的顾客数) $j$  的函数, (2) 顾客的服务时间序列  $\{B_j, j \geq 1\}$  也是一个独立随机变量序列,  $B_j \sim \text{Geo}(\mu_j)$ ,  $\mu_j$  是系统状态  $j$  的函数; (3) 每个服务台的服务时间独立同分布, 均服从参数为  $\mu$  的几何分布; (4)

$\{J_j, j \geq 1\}$  和  $\{B_j, j \geq 1\}$  相互独立. 因此, 排队系统 Geo/Geo/ $\cdot$  包含了 Geo/Geo/ $n$ , Geo/Geo/ $n/n$ , Geo/Geo/ $n/N$  ( $n \leq N$ ), Geo/Geo/ $n/m/m$  ( $n \leq m$ ) 和 Geo/Geo/ $\infty$  等排队系统.

### 6.5.1 两个引理

**引理 6.5.1** 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是  $n$  个独立随机变量, 且  $B_j \sim \text{Geo}(\mu_j), j = 1, 2, 3, \dots, n$ , 则

$$\min(B_1, B_2, \dots, B_n) \sim \text{Geo}(1 - \prod_{j=1}^n \bar{\mu}_j),$$

其中

$$\bar{\mu}_j = 1 - \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

证明是简单的.

**引理 6.5.2** 设  $A_0$  是排队系统 Geo/Geo/ $n$  的繁忙期. 则  $A_0$  的 PGF 为

$$A_0(Z) = \frac{\delta[\lambda Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \delta[\lambda Z + \lambda Z A_0(Z)]}, \quad \lambda < \delta, \quad (6.5.1)$$

且

$$E(A_0) = \frac{1}{\delta - \lambda}, \quad D(A_0) = \frac{\delta \bar{\delta} + \lambda \bar{\lambda}}{(\delta - \lambda)^3}, \quad \lambda < \delta, \quad (6.5.2)$$

其中  $\delta = 1 - \bar{\mu}^n, \bar{\delta} = 1 - \delta$ .

证明与定理 2.3.5 的证明类似.

### 6.5.2 Geo/Geo/ $\cdot$ 系统的忙期

**定理 6.5.1** 设  $W_j$  是排队系统 Geo/Geo/ $\cdot$  的  $j$  阶忙期,  $W_j(Z)$  是  $W_j$  的 PGF, 则

$$\begin{cases} W_j(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda}_j \mu_j Z} [\lambda_j \bar{\mu}_j W_{j+1}(Z) + \lambda_j \mu_j W_j(Z) \\ \quad + \bar{\lambda}_j \mu_j W_{j-1}(Z)], j \geq 1; \\ W_0(Z) = 1. \end{cases} \quad (6.5.3)$$

证 设  $a_j$  是从系统中的顾客数变为  $j$  时起一直到有一个顾



客到达系统时止这段时间,  $\beta_j$  是从系统中的顾客数变为  $j$  时起一直到有一个顾客服务完离开系统时止这段时间, 由几何分布无记忆性和独立性假设知  $\alpha_j \sim \text{Geo}(\lambda_j)$ ,  $\beta_j \sim \text{Geo}(\mu_j)$ , 且  $\alpha_j$  与  $\beta_j$  独立, 由引理 6.5.1 知  $\min(\alpha_j, \beta_j) \sim \text{Geo}(1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j)$ . 因为从系统中的顾客数变为  $j$  时起, 经过时间  $\min(\alpha_j, \beta_j)$  后, 系统中的顾客必定要发生变化, 或者  $j \rightarrow j+1$ , 或者  $j \rightarrow j-1$ , 或者  $j \rightarrow j$ , 所以由全数学期望公式, 有

$$\begin{aligned} W_j(Z) &= E(Z^{W_j}) = E[Z^{\min(\alpha_j, \beta_j)}][E(Z^{W_j} | \alpha_j < \beta_j)P\{\alpha_j < \beta_j\} \\ &\quad + E(Z^{W_j} | \alpha_j = \beta_j)P\{\alpha_j = \beta_j\} \\ &\quad + E(Z^{W_j} | \alpha_j > \beta_j)P\{\alpha_j > \beta_j\}] \\ &= \frac{(1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j)Z}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j Z} \left[ W_{j+1}(Z) \frac{\lambda_j \bar{\mu}_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} + W_{j-1}(Z) \frac{\lambda_j \mu_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} \right. \\ &\quad \left. + W_j(Z) \frac{\lambda_j \mu_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} \right] \\ &= \frac{Z}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j Z} [\lambda_j \bar{\mu}_j W_{j+1}(Z) + \lambda_j \mu_j W_j(Z) + \bar{\lambda}_j \mu_j W_{j-1}(Z)]. \end{aligned}$$

又显然有  $W_0(Z) = 1$ , 从而定理 6.5.1 得证.

**定理 6.5.2** 设  $E(W_j) = \omega_j$ ,  $E(W_j^2) = g_j$ ,  $j \geq 0$ , 则当

$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ ,  $\sup_{j \geq 0} \{\lambda_j \bar{\mu}_j\} < \infty$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \omega_i < \infty$  时, 有

$$E(\theta_1) = \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i, \quad (6.5.4)$$

$$E(\theta^2) = g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i (2\omega_i - 1), \quad (6.5.5)$$

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i + \sum_{m=1}^{j-1} \left( \prod_{k=1}^m \frac{\bar{\lambda}_k \mu_k}{\lambda_k \bar{\mu}_k} \right) \sum_{i=m+1}^{\infty} \rho_i, \quad j \geq 1, \quad (6.5.6)$$

$$g_j = g_1 + g_1 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\lambda_i \bar{\mu}_i \rho_i} + \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i (1 - 2\omega_i)}{\lambda_m \bar{\mu}_m \rho_m} \quad (6.5.7)$$

$$\text{其中 } \rho_1 = \frac{1}{\lambda_1 \bar{\mu}_1}, \rho_i = \frac{\lambda_1 \bar{\mu}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2 \cdots \lambda_{i-1} \bar{\mu}_{i-1}}{\lambda_1 \bar{\mu}_1 \lambda_2 \bar{\mu}_2 \cdots \lambda_i \bar{\mu}_i}, i \geq 2. \quad (6.5.8)$$

证 在(6.5.3)的两边关于  $Z$  取一、二阶导数后,令  $Z=1$ ,并利用公式  $\omega_j = W_j'(1)$ ,  $g_j = W_j''(1) + W_j'(1)$ ,得

$$\omega_j = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} (\lambda_j \bar{\mu}_j \omega_{j+1} + \lambda_j \mu_j \omega_j + \bar{\lambda}_j \mu_j \omega_{j-1}), \quad (6.5.9)$$

$$\begin{aligned} W_j''(1) &= \frac{2\bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j}{(1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j)^2} + \frac{2}{(1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j)^2} (\lambda_j \bar{\mu}_j \omega_{j+1} + \lambda_j \mu_j \omega_j + \bar{\lambda}_j \mu_j \omega_{j-1}) \\ &\quad + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} [\lambda_j \bar{\mu}_j W_{j+1}''(1) + \lambda_j \mu_j W_j''(1) + \bar{\lambda}_j \mu_j W_{j-1}''(1)]. \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

(6.5.9)和(6.5.10)两边分别相加,得

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} (\lambda_j \bar{\mu}_j g_{j+1} + \lambda_j \mu_j g_j + \bar{\lambda}_j \mu_j g_{j-1}) + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} + \frac{2\bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j}{(1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j)^2} \\ &\quad + \frac{2}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} \left( \omega_j - \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} \right), \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad g_j = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j} (\lambda_j \bar{\mu}_j g_{j+1} + \lambda_j \mu_j g_j + \bar{\lambda}_j \mu_j g_{j-1} + 2\omega_j - 1) \quad (6.5.11)$$

由(6.5.9)得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{1}{\lambda_j \bar{\mu}_j} + \frac{\bar{\lambda}_j \bar{\mu}_j}{\lambda_j \bar{\mu}_j} (\omega_j - \omega_{j-1}). \quad (6.5.12)$$

令  $Z_j = \omega_{j+1} - \omega_j$ ,  $a_j = \lambda_j \bar{\mu}_j$ ,  $b_j = \bar{\lambda}_j \mu_j$ ,  $j \geq 0$ ,得

$$Z_j = -\frac{1}{a_j} + \frac{b_j}{a_j} Z_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

因为  $\omega_0 = 0$ ,  $\therefore Z_0 = \omega_1 = E(\theta)$ . 递推得

$$Z_j = \frac{1}{a_j \rho_j} \sum_{i=1}^j \rho_i + \frac{\omega_1}{a_j \rho_j}. \quad (6.5.13)$$

因为  $Z_j \geq 0$ , 所以  $\omega_1 \geq \sum_{i=1}^j \rho_i$ . 如果  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \infty$ , 则  $\omega_j \geq \omega_1 \geq \infty$ ;

如果  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ , 设

$$u_n = \frac{Z_n a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}, \quad n \geq 1, \quad u_0 = Z_0 = \omega_1,$$

则

$$\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} u_n = Z_n = -\frac{1}{a_n} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} u_{n-1}.$$

故

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{a_n} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} < 0, \quad n \geq 1,$$

因此  $0 \leq u_n < u_{n-1}, n \geq 1$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  存在. 又因为  $u_0 - u_n =$

$\sum_{i=1}^n \rho_i$ , 所以

$$\omega_1 = u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty. \quad (6.5.14)$$

注意到  $u_n = Z_n \rho_n \lambda_n \bar{\mu}_n$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$  和  $\sup_{n \geq 0} \{ \lambda_n \bar{\mu}_n \} < \infty$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ . 因为系统  $\text{Geo}/\text{Geo}/\cdot$  的嵌入马氏链是不可约、非周期正常返

的, 所以  $0 < \omega_n < \infty, n \geq 1$ , 从而  $\omega_{n+1} = \sum_{i=0}^n Z_i < \infty$ . 于是  $\sup_{n \geq 1} \{ Z_n \} < \infty$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n u_n = 0$ . 由(6.5.14)立得(6.5.4). 由(6.5.12)

得  $\omega_j = \frac{1}{a_{j-1} \rho_{j-1}} \sum_{i=j}^{\infty} \rho_i + \omega_{j-1}$ , 递推可得(6.5.5). 由(6.5.11)得

$$\begin{aligned} g_{j+1} - g_j &= \frac{1 - 2\omega_j}{a_j} + \frac{b_j}{a_j} (g_j - g_{j-1}) \\ &= \frac{1}{a_j \rho_j} \sum_{i=1}^j \rho_i (1 - 2\omega_i) + \frac{1}{a_j \rho_j} g_1. \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

比较(6.5.15)与(6.5.13), 得

$$E(\theta^2) = g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (2\omega_i - 1) \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2\omega_i \rho_i - \omega_1, \quad (6.5.16)$$

由(6.5.15) 得

$$g_j = g_1 + g_1 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{a_i \rho_i} + \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i (1 - 2\omega_i)}{a_m \rho_m}.$$

这样,定理 2 得证.

### 6.5.3 例子与应用

(1) Geo/Geo/ $n$  系统的忙期

$$\text{这时 } \lambda_j = \lambda, j \geq 0, \mu_j = \begin{cases} 1 - \bar{\mu}^j, & 1 \leq j < n, \\ 1 - \bar{\mu}^n, & j \geq n \end{cases}$$

且  $W_n = W_{n-1} + A_0$ . 易见  $W_{n-1}$  与  $A$  独立. 由引理 6.5.2 和定理 6.5.1, (6.5.3) 变为

$$\begin{cases} W_j(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^j Z} [\lambda \bar{\mu}^j W_{j+1}(Z) + \lambda (1 - \bar{\mu}^j) W_j(Z) \\ \quad + \bar{\lambda} (1 - \bar{\mu}^j) W_{j-1}(Z)], & 1 \leq j < n, \\ W_n(Z) = W_{n-1}(Z) A_0(Z), \\ W_0(Z) \neq 1, \end{cases} \quad (6.5.17)$$

其中

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \bar{\mu}^n) [\bar{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \bar{\mu}^n [\bar{\lambda} Z + \lambda Z A_0(z)]}. \quad (6.5.18)$$

(a) 对于 Geo/Geo/1 系统, (6.5.17) 变为

$$W_1(Z) = A_0(Z) \frac{\mu [\bar{\lambda} Z + \lambda Z W_1(Z)]}{1 - \bar{\mu} [\bar{\lambda} Z + \lambda Z W_1(Z)]}. \quad (6.5.19)$$

由(2)得

$$E(\theta) = \omega_1 = \frac{1}{\mu - \lambda}, D(\theta) = \frac{\mu \bar{\mu} + \lambda \bar{\lambda}}{(\mu - \lambda)^3}, \lambda < \mu.$$

(b) 对于 Geo/Geo/2 系统, (6.5.17) 变为

$$W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} [\lambda \bar{\mu} W_1(Z) A_0(Z) + \lambda \mu W_1(Z) + \bar{\lambda} \mu], \quad (6.5.20)$$

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \bar{\mu}^2) [\bar{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \bar{\mu}^2 [\bar{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}. \quad (6.5.21)$$

解(6.5.20),得

$$W_1(Z) = \frac{\bar{\lambda}\mu Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}Z - \lambda\mu Z - \lambda \bar{\mu}ZA_0(Z)}. \quad (6.5.22)$$

由(6.5.22)与(6.5.21)或由(6.5.4)得

$$E(\theta) = \omega_1 = \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda} - \bar{\mu}^2)}. \quad (6.5.23)$$

(c)对于 Geo/Geo/3, (6.5.17)变为

$$\begin{cases} W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}Z} [\lambda \bar{\mu}W_2(Z) + \lambda\mu W_1(Z) + \bar{\lambda}\mu], \\ W_2(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^2Z} [\lambda \bar{\mu}^2 W_2(Z)A_0(Z) \\ + \lambda(1 - \bar{\mu}^2)W_2(Z) + \bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^2)W_1(Z)], \end{cases} \quad (6.5.24)$$

且

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \bar{\mu}^3)[\bar{\lambda}Z + \lambda ZA_0(Z)]}{1 - \bar{\mu}^3[\bar{\lambda}Z + \lambda ZA_0(Z)]}. \quad (6.5.25)$$

解之得

$$\begin{aligned} W_1(Z) &= \theta(Z) \\ &= \frac{\mu[Z - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^2Z^2 - \lambda(1 - \bar{\mu}^2)Z^2 - \lambda \bar{\mu}^2Z^2A_0(Z)]}{1 - [\bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} + \lambda(1 - \bar{\mu}^2) + \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}]Z + \bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^3Z^2 + \lambda \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^3Z^2A_0(Z)}, \end{aligned} \quad (6.5.26)$$

且

$$E(\theta) = \frac{\bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^2)(\bar{\lambda} - \bar{\mu}^3) + \lambda \bar{\mu}(\bar{\lambda} - \bar{\mu}^3) + \lambda^2 \bar{\mu}^3}{\bar{\lambda}^2 \mu(1 - \bar{\mu}^2)(\bar{\lambda} - \bar{\mu}^3)}. \quad (6.5.27)$$

(2) Geo/Geo/ $n/n$  系统的忙期

这时,  $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \mu_j = 1 - \bar{\mu}^j, j = 0, 1, 2, \dots, n$  且  $W_n = A_0 + W_{n-1}, A_0 \sim \text{Geo}(1 - \bar{\mu}^n), W_{n-1}$  与  $A_0$  独立. (6.5.3)变为

$$\begin{cases} W_j(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^j Z} [\lambda \bar{\mu}^j W_{j+1}(Z) + \lambda(1 - \bar{\mu}^j) W_j(Z) + \bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^j) \\ \quad \cdot W_{j-1}(Z)], \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ W_n(Z) = W_{n-1}(Z) \frac{(1 - \bar{\mu}^n) Z}{1 - \bar{\mu}^n Z}, \\ W_0(Z) = 1. \end{cases} \quad (6.5.28)$$

(a) 对于 Geo/Geo/2/2 系统, (6.5.28) 变为

$$W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} \left[ \lambda \bar{\mu} W_1(Z) \frac{(1 - \bar{\mu}^2) Z}{1 - \bar{\mu}^2 Z} + \lambda \mu W_1(Z) + \bar{\lambda} \mu \right].$$

解之得

$$W_1(Z) = \frac{\bar{\lambda} \mu Z (1 - \bar{\mu}^2 Z)}{(1 - \bar{\mu}^2 Z)(1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z - \lambda \mu Z) - \lambda \bar{\mu} Z (1 - \bar{\mu}^2) Z}, \quad (6.5.29)$$

$$E(\theta) = \omega_1 = \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda} - \bar{\mu}^2)}. \quad (6.5.30)$$

(b) 对 Geo/Geo/3/3 系统, (6.5.28) 变为

$$\begin{cases} W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} [\lambda \bar{\mu} W_2(Z) + \lambda \mu W_1(Z) + \bar{\lambda} \mu], \\ W_2(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^2 Z} \left[ \lambda \bar{\mu}^2 W_2(Z) \frac{(1 - \bar{\mu}^3) Z}{1 - \bar{\mu}^3 Z} \right. \\ \quad \left. + \lambda(1 - \bar{\mu}^2) W_2(Z) + \bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^2) W_1(Z) \right]. \end{cases} \quad (6.5.31)$$

解之得

$$W_1(Z) = \frac{\bar{\lambda} \mu Z P(Z)}{(1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z) P(Z) - \lambda \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z^2 (1 - \bar{\mu}^3 Z) - \lambda \mu Z P(Z)}, \quad (6.5.32)$$

其中

$$P(Z) = (1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^2 Z)(1 - \bar{\mu}^3 Z) - \lambda \bar{\mu}^2 (1 - \bar{\mu}^3) Z^2 \\ - \lambda(1 - \bar{\mu}^2)(Z - \bar{\mu}^3 Z^2).$$

由(6.5.4)得

$$E(\theta) = \frac{(1 - \bar{\mu}^3)(\bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 + \lambda \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}) + \lambda^2 \bar{\mu}^3}{\bar{\lambda}^3 \mu (1 - \bar{\mu}^2)(1 - \bar{\mu}^3)}. \quad (6.5.33)$$

(3) Geo/Geo/ $n/N$  ( $n \leq N$ ) 系统的忙期

这时,  $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \mu_j = \begin{cases} 1 - \bar{\mu}^j, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 - \bar{\mu}^n, & j = n, n+1, \dots, N. \end{cases}$

(6.5.3) 变成

$$\begin{cases} W_j(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^j Z} [\lambda \bar{\mu}^j W_{j+1}(Z) + \lambda(1 - \bar{\mu}^j) W_j(Z) \\ \quad + \bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^j) W_{j-1}(Z)], 1 \leq j \leq n-1 \\ W_j(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^n Z} [\lambda \bar{\mu}^n W_{j+1}(Z) + \lambda(1 - \bar{\mu}^n) W_j(Z) \\ \quad + \bar{\lambda}(1 - \bar{\mu}^n) W_{j-1}(Z)], n \leq j \leq N-1 \\ W_N(Z) = W_{n-1}(Z) \frac{(1 - \bar{\mu}^n) Z}{1 - \bar{\mu}^n Z}, \\ W_0(Z) = 1. \end{cases} \quad (6.5.34)$$

(a) 对于 Geo/Geo/1/2 系统(6.5.34)变为

$$W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} \left[ \lambda \bar{\mu} W_1(Z) \frac{\mu Z}{1 - \bar{\mu} Z} + \lambda \mu W_1(Z) + \bar{\lambda} \mu \right]. \quad (6.5.35)$$

解之, 得

$$W_1(Z) = \frac{\bar{\lambda} \mu Z (1 - \bar{\mu} Z)}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z - \mu Z - \lambda \mu Z + \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}^2 Z^2}, \quad (6.5.36)$$

且

$$E(W_1) = E(\theta) = \frac{\lambda + \mu - \lambda \mu}{\bar{\lambda} \mu^2}. \quad (6.5.37)$$

(b) 对于 Geo/Geo/1/3 系统(6.5.34)变成

$$\begin{cases} W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} [\lambda \bar{\mu} W_2(Z) + \lambda \mu W_1(Z) + \bar{\lambda} \mu], \\ W_2(Z) = \frac{Z}{1 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} Z} \left[ \lambda \bar{\mu} W_2(Z) \frac{\mu Z}{1 - \bar{\mu} Z} + \lambda \mu W_2(Z) + \bar{\lambda} \mu W_1(Z) \right]. \end{cases} \quad (6.5.38)$$

解之得

$$W_1(Z) =$$

$$\frac{\bar{\lambda}\mu Z(1-2\bar{\mu}Z+\lambda Z+\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z^2)}{1-(3\bar{\mu}-2\lambda)Z+(\lambda^2\mu^2+\lambda\mu\bar{\mu}+2\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2+\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^2+\lambda\mu\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu})Z^2-\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^3Z^3}. \quad (6.5.39)$$

$$E(\theta) = E(W_1) = \frac{\bar{\lambda}^2\mu^2+\bar{\lambda}\mu+\lambda^2\bar{\mu}^2}{\bar{\lambda}^3\mu^3}. \quad (6.5.40)$$

(4) Geo/Geo/ $n/m/m$  系统的忙期

这时,

$$\lambda_j = (m-j)\lambda, j=0,1,2,\dots,m, \mu_j = \begin{cases} 1-\bar{\mu}_j, & j=1,2,\dots,n-1, \\ 1-\bar{\mu}^n, & j=n,n+1,\dots,m. \end{cases}$$

(6.5.3)变为

$$\begin{cases} W_j(Z) = \frac{Z}{1-[1-(m-j)\lambda]\bar{\mu}_j Z} [(m-j)\lambda\bar{\mu}_j W_{j+1}(Z) + (m-j)\lambda(1-\bar{\mu}_j) \\ \quad \cdot W_j(Z) + [1-(m-j)\lambda](1-\bar{\mu}_j)W_{j-1}(Z)], j=1,2,\dots,n-1, \\ W_j(Z) = \frac{Z}{1-[1-(m-n)\lambda]\bar{\mu}^n Z} [(m-n)\lambda\bar{\mu}^n W_{j+1}(Z) + (m-n)\lambda(1-\bar{\mu}^n) \\ \quad \cdot W_j(Z) + [1-(m-n)\lambda](1-\bar{\mu}^n)W_{j-1}(Z)], j=n,n+1,\dots,m-1, \\ W_m(Z) = W_{m-1}(Z) \frac{(1-\bar{\mu}^n)Z}{1-\bar{\mu}^n Z}, \\ W_0(Z) = 1. \end{cases} \quad (6.5.41)$$

(a) 对于 Geo/Geo/1/2/2, (6.5.41)变为

$$W_1(Z) = \frac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z} \left[ \lambda\bar{\mu}W_1(Z) \frac{\mu Z}{1-\bar{\mu}Z} + \lambda\mu W_1(Z) + \bar{\lambda}\mu \right]. \quad (6.5.42)$$

解之,得

$$W_1(Z) = \frac{\bar{\lambda}\mu Z(1-\bar{\mu}Z)}{1-\bar{\lambda}\mu Z-\lambda\mu Z-\bar{\mu}Z+\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z^2},$$

且

$$E(\theta) = E(W_1) = \frac{\lambda+\mu-\lambda\mu}{\bar{\lambda}\mu^2}. \quad (6.5.43)$$



## 参 考 文 献

- [ 1 ] 孙荣恒. 应用概率论. 科学出版社, 1998 年
- [ 2 ] 徐光辉. 随机服务系统. 科学出版社, 1980 年
- [ 3 ] 华兴(美). 排队论与随机服务系统. 上海翻译出版公司, 1987 年
- [ 4 ] 孙荣恒. 随机过程及其应用. 1999 年重庆大学
- [ 5 ] Hideaki Takagi. Queueing Analysis. North-Holland, Amsterdam, 1991
- [ 6 ] Leonard Kleinrock. Queueing Systems. John Wiley & sons, New York, 1975
- [ 7 ] 孙荣恒. 关于随机服务系统  $k$  阶忙期的一个注记. 重庆大学学报, 1993, 16(3)
- [ 8 ] 孙荣恒. 排队系统  $M/M/\cdot$  的平均忙期. 重庆大学学报, 1997, 20(4)
- [ 9 ] 孙荣恒, 孙宇. 排队系统  $Geo/M/n$  的  $k$  阶忙期. 重庆大学学报, 1998, 21(5)
- [ 10 ] 孙荣恒.  $Er/M/1$  排队系统的忙期. 重庆大学学报, 1998, 21(5)
- [ 11 ] Cohen, J. W. The Single Server Queue, Revised edition. North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1982
- [ 12 ] Cooper R. B. Introduction to Queueing Theory, Second edition, North-Holland Publishing Company, 1981
- [ 13 ] Hunter, J. J. Mathematical Techniques of Applications, Academic Press, New York, 1983
- [ 14 ] 孙荣恒, 李福建. 间断泊松过程的叠加过程的参数计算. 电子学报, 1988, 26(4)
- [ 15 ] Li Fujian, Sun Rongheng. Measurement-Estimation Approach to Efficiency Evaluation of Bandwidth Allocation Scheme in ATM Networks, Conference Record Vol. 2 of 3. IEEE International Conference on Communications, 1997. 6
- [ 16 ] Sun Rongheng. Asymmetric Exhaustive Service Polling System with Bernoulli Feedback, Conference Record, International Workshop on Markov Processes & Controlled Markov Chains, 1999. 8
- [ 17 ] 孙荣恒, 雷玉浩. 关于  $M/G/1$  系统等待时间的一个注记. 重庆大学学报, 1999, 22(1)
- [ 18 ] 孙荣恒.  $Er/M/1$  排队系统的忙期. 重庆大学学报, 1998. 9
- [ 19 ] 雷玉浩, 孙荣恒. 批到达客尽服务轮间系统分析. 重庆大学学报, 1999. 11

现代数学基础丛书

[illegible]

圖書, 其詳見

